Cur frame Page 1 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

190 Kansen in de civiele techniek

Deel 1: probabilistisch ontwerpen in theorie

Eerste druk, maart 1997

CUR, Civieltechnisch Centrum Uitvoering Research en Regelgeving
Directoraat-Generaal Rijkswaterstaat
> Dienst Weg- en Waterbouwkunde
> Bouwdienst

Cur frame Page 2 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Deze publicatie is onder de volgende trefwoorden opgenomen in het CUR-infobestand:
betrouwbaarheidsanalyse
faalkans
foutenbomen
kansrekening
probabilistische berekeningen
toepassingsgebieden
probabilistisch ontwerp, ontwerpfilosofie
risico-analyse
stochastische variabelen
veiligheid

Fotoverantwoording

De in deze uitgave gebruikte foto's zijn afkomstig van:
> Aeroview b.v. – Rijkswaterstaat (omslag);
> ANP Foto;
> AFP Photo (omslag);
> United Photos de Boer bv.

Auteursrechten

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of op enig andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de CUR.
Het is toegestaan overeenkomstig artikel 15a Auteurswet 1912 gegevens uit deze uitgave te citeren in artikelen, scripties en boeken, mits de bron op duidelijke wijze wordt vermeld, alsmede de aanduiding van de maker, indien deze in de bron voorkomt, ©CUR-publicatie 190,„Kansen in de civiele techniek, Deel 1: probabilistisch ontwerpen in theorie", maart 1997, Stichting CUR, Gouda.

Aansprakelijkheid

De CUR en degenen die aan deze publicatie hebben meegewerkt, hebben een zo groot mogelijke zorgvuldigheid betracht bij het samenstellen van deze uitgave. Nochtans moet de mogelijkheid niet worden uitgesloten dat er toch fouten en onvolledigheden in deze uitgave voorkomen. Ieder gebruik van deze uitgave en gegevens daaruit is geheel voor eigen risico van de gebruiker en de CUR sluit, mede ten behoeve van al degenen die aan deze uitgave hebben meegewerkt, iedere aansprakelijkheid uit voor schade die mocht voortvloeien uit het gebruik van deze uitgave en de daarin opgenomen gegevens, tenzij de schade mocht voortvloeien uit opzet of grove schuld zijdens de CUR en/of degenen die aan deze uitgave hebben meegewerkt.

ISBN 90 376 0102 2

Cur frame Page 3 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Voorwoord

Al enige tijd bestaat de behoefte om de risico-analytische technieken, die kunnen worden toegepast bij bouw- en milieuproblemen, van een gewaarborgd en praktisch toepasbaar basisdocument te voorzien. De CUR heeft, in samenwerking met Rijkswaterstaat, het initiatief genomen om een handboek „Kansen in de civiele techniek" samen te stellen, dat de probabilistische aanpak voor ontwerp, advisering en realisering bij bouwprojecten voor het bedrijfsleven en de overheid hanteerbaar maakt.

Voor het opstellen van het handboek heeft CUR-onderzoekcommissie E 10 "Risico-analyse" de relevante ervaringen rond de uitvoering van grote civieltechnische werken in het recente verleden systematisch verzameld en bewerkt. Hierdoor is deze informatie waardevol voor een breed scala van toepassingen en vormt zij ook een goede basis voor verdere ontwikkelingen en toepassingen.

De opzet van het handboek is zo breed mogelijk, waarbij de civiele techniek als uitgangspunt heeft gediend. Er is echter in het handboek ook plaats voor niet-civieltechnische toepassingen, waar risico-analyse kan worden ingezet voor verantwoorde onderbouwing van besluiten. Een voorbeeld hiervan is de bepaling van de milieu-aspecten van bouwmaterialen, waarbij emissies en van milieubelastende elementen probabilistisch te benaderen zijn. Een ander belangrijk onderwerp is momenteel de veiligheidfilosofie voor ondergrondse werken. Reeds tijdens het commissiewerk werd de verzamelde kennis toegepast bij andere onderzoek-projecten, bij het opstellen van richtlijnen voor waterkeringen en concrete bouwwerken zoals de stormvloedkering in de Nieuwe Waterweg en het nieuwe hoofdkantoor van ABN-Amro.

Op moment van verschijnen van dit handboek was de samenstelling van de onderzoekcommissie E 10 "Risico-analyse" als volgt:

PROF.DRS.IR. J.K. VRIJLING, VOORZITTER TU-Delft, Faculteit der Civiele Techniek
DRS. A. ROOS, SECRETARIS CUR
DR. B.J.M. ALE Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu
D. VAN DER BRAND Ministerie van Volksgezondheid, Ruimtelijke Ordening en Milieubeheer
IR. L. DE BRUYN Ballast Nedam Engineering B.V.
DR. K.G. BUENO DE MESQUITA M&O Consultants B.V.
IR. P.H.A.J.M. VAN GELDER TU-Delft, Faculteit der Civiele Techniek
IR. W. VAN HENGEL Rijkswaterstaat, Bouwdienst
IR. J.P.F.M. JANSSEN Rijkswaterstaat, Dienst Weg en Waterbouwkunde
ING. G.C. DE JONG Gemeentelijk Havenbedrijf Rotterdam
IR. M.T. VAN DER MEER ONRI/Fugro B.V.
IR. W. MEERMANS TU-Delft, Faculteit der Civiele Techniek
IR. J.M. NEDEREND AVECO BMK
IR. R.W. VAN OTTERLOO Kema Nederland B.V.
IR. F.R. REDEKER Redeker & Partners B.V.
PROF.DR.IR. H.A.J. DE RIDDER Hollandsche Beton- en Waterbouw B.V.
A.A. VAN DE VELDE ABN-Amro Bank N.V., Concernhuisvesting en Vastgoed
PROF.IR A.C.W.M. VROUWENVELDER TNO-Bouw

Cur frame Page 4 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

IR. J.F.M. WESSELS Lloyd's Register
IR. H.K.T. KUIJPER, RAPPORTEUR TU-Delft, Faculteit der Civiele Techniek
PROF.IR. J. STUIP, COÖRDINATOR CUR
PROF.DR.IR. J.F. AGEMA, MENTOR CUR

De eindredactie werd verzorgd door ir. H.K.T. Kuijper. Regelmatig werden tussenresultaten van de commissie besproken met de Contactgroep Risicoanalyse (CRA). De illustraties zijn verzorgd door Jacqueline Jessurun b.v.

De CUR spreekt haar dank uit aan alle instellingen die kennis en kunde hebben gedeeld voor de samenstelling van deze publicatie. Bijzondere dank gaat uit naar de Dienst Weg- en Waterbouwkunde en de Bouwdienst van Rijkswaterstaat, het ICES-investeringsprogramma voor ondergronds bouwen (COB) en de ABN-Amro Bank N.V. voor hun financiële bijdrage.

maart 1997

Het bestuur van de CUR

Cur frame Page 5 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Inhoud

		Samenvatting	**10**
		Summary	**11**
		Notaties	**12**
Hoofdstuk	**1**	**Inleiding**	**15**
	1.1	**Doelstellingen**	**15**
	1.2	**Theorie voor de praktijk**	**15**
	1.3	**Overzicht van de inhoud**	**15**
	1.4	**Leeswijzer**	**16**
Hoofdstuk	**2**	**Kansrekening**	**19**
	2.1	**Kansbegrip**	**19**
	2.1.1	Kansdefinitie van Laplace	19
	2.1.2	Experimentele kansdefinitie	19
	2.1.3	Definitie van het kansbegrip met behulp van axioma's	19
	2.1.4	Subjectief kansbegrip	21
	2.2	**Stochastische variabelen**	**21**
	2.2.1	Typen stochastische variabelen	21
	2.2.2	Kansmassafunctie, kansverdelingsfunctie en kansdichtheids-functie	22
	2.2.3	Momenten	24
	2.3	**Stochastische vectoren**	**26**
	2.4	**Functies van stochastische variabelen**	**30**
	2.4.1	Functies van één stochastische variabele	30
	2.4.2	Functies van $R^n \rightarrow R^n$	32
	2.4.3	Functies van $R^n \rightarrow R^1$	32
	2.4.4	Centrale limietstelling	36
	2.5	**Extreme waarde verdelingen**	**37**
	2.6	**Schatten van verdelingen**	**39**
	2.6.1	Inleiding	39
	2.6.2	Subjectieve parameterschatting	40
	2.6.3	Frequentistische parameterschatting	40
	2.6.4	Bayesiaanse parameterschatting	42
	2.6.5	Verdelingskeuze	42
		Literatuur	44
Hoofdstuk	**3**	**Onderdelen van een risico-analyse**	**47**
	3.1	**Inleiding**	**47**

Cur frame Page 6 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

	3.2	**Stappen in een risico-analyse**	**48**
	3.3	**Korte toelichting op het stappenplan**	**50**
	3.3.1	Beschrijving van het proces of object als een systeem	50
	3.3.2	Inventarisatie van de mogelijke ongewenste gebeurtenissen, effecten en gevolgen	51
	3.3.3	Kansdeel van het risico	51
	3.3.4	Vaststellen en evalueren van het risico	52
	3.3.5	Besluitvorming op basis van risico-analyse	52
		Literatuur	53
Hoofdstuk	**4**	**Beslissen onder onzekerheden**	**55**
	4.1	**Inleiding**	**55**
	4.2	**Inleiding in de beslissingstheorie**	**56**
	4.2.1	Deterministische analyse van het beslissingsprobleem	56
	4.2.2	Probabilistische analyse van het beslissingsprobleem	60
	4.2.3	Keuze uit oneindig veel mogelijke acties	64
	4.3	**Referentiekader met betrekking tot veiligheid**	**65**
	4.3.1	Problematiek	65
	4.3.2	Type randvoorwaarden	67
	4.3.3	Huidige Nederlandse veiligheidsnormen	68
	4.3.4	Algemeen toepasbare veiligheidsnormen	69
		Literatuur	73
Hoofdstuk	**5**	**Betrouwbaarheid van een element**	**75**
	5.1	**Inleiding**	**75**
	5.1.1	Overzicht	75
	5.1.2	Grenstoestand, sterkte en belasting	75
	5.1.3	Berekeningsmethoden	77
	5.1.4	Tijdsafhankelijkheid	78
	5.2	**Niveau III methoden**	**81**
	5.2.1	Fundamentele oplossing	81
	5.2.2	Numerieke integratie	82
	5.2.3	Monte Carlo methode	87
	5.2.4	Bepaling van het ontwerppunt bij faalkansberekening met niveau III methoden	93
	5.3	**Niveau II methoden**	**93**
	5.3.1	Inleiding niveau II methoden	93
	5.3.2	Niet-lineaire betrouwbaarheidsfuncties	96
	5.3.3	Niet-normaal verdeelde basisvariabelen	102
	5.3.4	Stochastisch afhankelijke basisvariabelen	105
	5.4	**Vergelijking van de verschillende rekenmethoden**	**109**
	5.5	**Tijdsafhankelijkheid**	**111**
	5.5.1	Faalkans en levensduur	111

Cur frame Page 7 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

	5.5.2	Verouderingsprocessen	115
	5.5.3	Risicoberekening bij systemen met een variabel faaltempo	121
	5.5.4	Niet-beschikbaarheid	123
	5.5.5	Markov-processen	125
	5.5.6	Combinaties van tijdsafhankelijke belastingen	127
	5.6	**Sterkteberekening met niveau I methode**	**131**
	5.6.1	Principe van de niveau I methode	131
	5.6.2	Koppeling van de niveau I methode aan de faalkansberekening	131
	5.6.3	Standaardisatie van de α-waarden	134
	5.6.4	Belastingcombinaties bij niveau I sterkteberekening	135
		Literatuur	137
Hoofdstuk	**6**	**Betrouwbaarheid van systemen**	**139**
	6.1	**Inleiding betrouwbaarheid van systemen**	**139**
	6.2	**Faalkansberekening van eenvoudige systemen**	**140**
	6.2.1	Faalkans van het seriesysteem	140
	6.2.2	Faalkans van het parallelsysteem	147
	6.3	**Analyse van systemen**	**150**
	6.3.1	Inleiding van de analyse van systemen	150
	6.3.2	**FMEA (Failure modes and effects analysis)**	**151**
	6.3.3	FMECA (Failure modes, effects and criticality analysis)	153
	6.3.4	Gebeurtenissenboom	153
	6.3.5	Foutenboom	155
	6.3.6	Cause consequence chart	161
	6.4	**Tijdsafhankelijkheid**	**163**
	6.4.1	Levensduur van een systeem	163
	6.4.2	Niet-beschikbaarheid	166
	6.4.3	Markov-keten	171
	6.5	**Faalkanstoedeling en systeemoverwegingen**	**175**
	6.5.1	Faalkanstoedeling	175
	6.5.2	Systeemoverwegingen	177
		Literatuur	179
Hoofdstuk	**7**	**Betrouwbaarheid van corrigeerbare systemen**	**179**
	7.1	**Inleiding**	**179**
	7.2	**Plannen van de uitvoering van activiteiten**	**179**
	7.2.1	Inleiding plannen van onzekerheden	179
	7.2.2	Invloed van corrigerende maatregelen op tijdsduur en kosten	182
	7.3	**Onderhoud**	**184**
	7.3.1	Inleiding onderhoudsstrategieën	184
	7.3.2	Invloed van onderhoud op het risico	188
	7.3.3	Invloed van inspecties	189
		Literatuur	192

Cur frame Page 8 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Hoofdstuk	8	Toepassingsgebieden	195
	8.1	Constructieve veiligheid	195
	8.2	Onderhoud en beheer	195
	8.3	Kwaliteitszorg	196
	8.4	Veiligheidsmanagement	196
	8.5	Toepassing van probabilistische technieken met betrekking tot natuur en milieu	197
	8.6	Geostatistiek	200
	8.7	Betrouwbaarheid van software	201
	8.8	Contractvorming	201
		Literatuur	202
BIJLAGE	A	Rekenregels van de kansrekening	203
	A1	Kans dat een gebeurtenis niet optreedt	203
	A2	Kans dat minstens één van twee gebeurtenissen optreedt	203
	A3	Voorwaardelijke kans	204
	A4	Kans dat twee gebeurtenissen beide optreden	204
	A5	Regel van de totale waarschijnlijkheid	205
	A6	Regel van Bayes	206
BIJLAGE	B	Enkele veel gebruikte verdelingen	207
	B1	Eenvoudige begrensde verdelingen	207
	B1.1	Uniforme verdeling	207
	B1.2	Driehoeksverdeling	208
	B2	Normale verdeling	209
	B3	Lognormale verdeling	212
	B4	Gamma-verdeling	213
	B5	t-verdeling	214
	B6	Asymptotische extreme waarde verdelingen	215
BIJLAGE	C	Methoden voor het schatten van parameters en verdelingen	219
	C1	Methode der momenten	219
	C2	Methode van de maximum likelihood	219
	C3	Parameterschatting met de methode der kleinste kwadraten	220
	C4	Betrouwbaarheid van de geschatte parameters	220
	C5	Bayesiaanse parameterschatting	221
	C6	Chi-kwadraat-test	222
	C7	Kolmogorov-Smirnov-test	223
	C8	Bayesiaanse procedure voor de keuze van het verdelingstype	227
BIJLAGE	D	Databases	227

Cur frame Page 9 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

BIJLAGE	**E**	**Sterkte- en belastingparameters bij de beoordeling van de veiligheid van bouwconstructies**	**229**
		Literatuur	232
BIJLAGE	**F**	**Randomgetallen generator**	**233**
BIJLAGE	**G**	**Bijdragecoëfficiënten volgens niveau III methode**	**235**
BIJLAGE	**H**	**Materiaalgedrag**	**236**
	H1	**Materiaalgedrag**	**236**
	H2	**Bros materiaalgedrag**	**236**
	H3	**Ductiel materiaalgedrag**	**238**
		Literatuur	240

Cur frame Page 10 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Samenvatting

In de praktijk is de laatste jaren een tendens onstaan om voor projecten in de civiele techniek, maar ook daarbuiten een risico-analyse uit te voeren om risico's te kunnen inschatten, en zo een optimaal uitvoeringsproces of veiligheidsniveau te kunnen waarborgen.
Als ondersteuning voor deze ontwikkeling is dit handboek „Kansen in de civiele techniek, Deel 1: probabilistisch ontwerpen in theorie" samengesteld. Het handboek belicht alle aspecten van de theorie van risico-analyse, het zet hiermee een standaard, die de toepassing in de praktijk vereenvoudigt. De theorie is aangevuld met voorbeelden van eenvoudige toepassingen.
In het handboek wordt een uitgebreide samenvatting van de voor het uitvoeren van een risico-analyse relevante onderdelen van de kansrekening gegeven. Belangrijke onderwerpen zijn hier de uitleg van het kansbegrip, stochastische variabelen en parameterschattingen.
Op een schematische wijze worden de verschillende onderdelen en fasen van een risico-analyse beschreven. De rekentechnieken voor het bepalen van risico's krijgt uitgebreid aandacht. Maar ook de functie en het doel van een risico-analyse komt aan de orde. Zo komt het nemen van beslissingen onder onzekere omstandigheden aan bod. Aan de hand van voorbeelden wordt aangegeven hoe verschillende mogelijke beslissingen gewogen kunnen worden. Verder wordt het referentiekader, waaraan het berekende risico getoetst kan worden beschreven.
Een belangrijke stap in een risico-analyse is doorgaans de systeembeschrijving en -analyse. Hierbij worden elementen binnen een systeem gedefinieerd en geanalyseerd. Verschillende methoden worden beschreven, voorzien van duidelijke voorbeelden, om de betrouwbaarheid van een element te bepalen. Hieronder vallen onder andere Monte-Carlo methoden en niveau II ontwerppuntmethoden.
Vervolgens worden methoden aangereikt om inzicht te verkrijgen in de betrouwbaarheid van een systeem. Hierbij komen onder andere foutenboomanalyses, gebeurtenissenbomen of Failure Mode Effect Analysis (FMEA)-tabellen aan de orde. Ook wordt de bruikbaarheid van Markov-ketens aangegeven.
Tenslotte is ingegaan op corrigeerbare systemen. Bij veel situaties is het mogelijk om in verloop van de tijd in te grijpen om een ongewenste gebeurtenis te voorkomen. Denk hierbij bijvoorbeeld aan het inzetten van extra menskracht en materieel als blijkt dat een bouwproces dreigt uit te lopen. Op deze wijze kan met een investering een grotere kostenpost worden voorkomen. Ook bij het beheer van constructies kan inzicht in de invloed van onderhoud op de betrouwbaarheid van een systeem van grote invloed zijn.
Van oorsprong is de risico-analyse afkomstig uit specifieke toepassingsgebieden als bijvoorbeeld de nucleaire industrie, ruimtevaart en civiele techniek. Het handboek besluit met het noemen van een aantal toepassingsgebieden, waar het toepassen van technieken uit de risico-analyse nuttig kan zijn.

Cur frame Page 11 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Summary

In recent years there has been a growing tendency carry out risk analyses before embarking on civil engineering or other projects in order to estimate the risks involved and to determine the optimum construction process or to guarantee a certain level of safety.
In support of this development, the handbook „Risk analysis in civil engineering, Vol. 1 Probabilistic design in theory" has been complied. This handbook discusses all aspects of the theory of risk analysis, setting a standard which will facilitate it s use in practice. The theory is supplemented by examples of simple applications.
The handbook contains a summary of the those parts of the theory of probability that are relevant to the execution of a risk analysis. For this the explanation of the theory of probability, stochastic variables and parameter estimates are important subjects. The various parts and phases of a risk analysis are described schematically.
Detailed attention is paid to the mathematical methods used to determine risk, as well as to the function and objective of a risk analysis. Consideration is given to decision taking in uncertain circumstances. Examples are used to explain how the results of different possible decisions can be compared. In addition, a frame of reference against which the calculated risk can be evaluated is described.
An important step in risk analysis is usually formed by the system description and analysis. This defines and analyses the elements within a system. Various methods to determine the reliability of an element are described, including the Monte-Carlo method and Level II design-point methods. These are accompanied by clear examples.
Next, methods which provide insight into the reliability of a system are given. Theses include fault-tree analyses, event trees and Failure Mode Effect (FMEA) Tables. The use of Markov-chains is also described.
Finally, correctible systems are considered. In many situations it is possible to take action while the process is in progress to prevent the occurrence of undesirable events. For example, the employment of extra manpower and equipment when a construction project threatens to overrun. Such an investment may avert the need for even greater expenditure. Insight into the effects of maintenance on the reliability of a system may also exert a big influence on the management of systems and processes.
Risk analysis originated from specific areas of application in, for example, the nuclear industry, space travel and civil engineering. The handbook concludes by mentioning a number of fields in which the use of risk analysis techniques may be useful.

Notaties

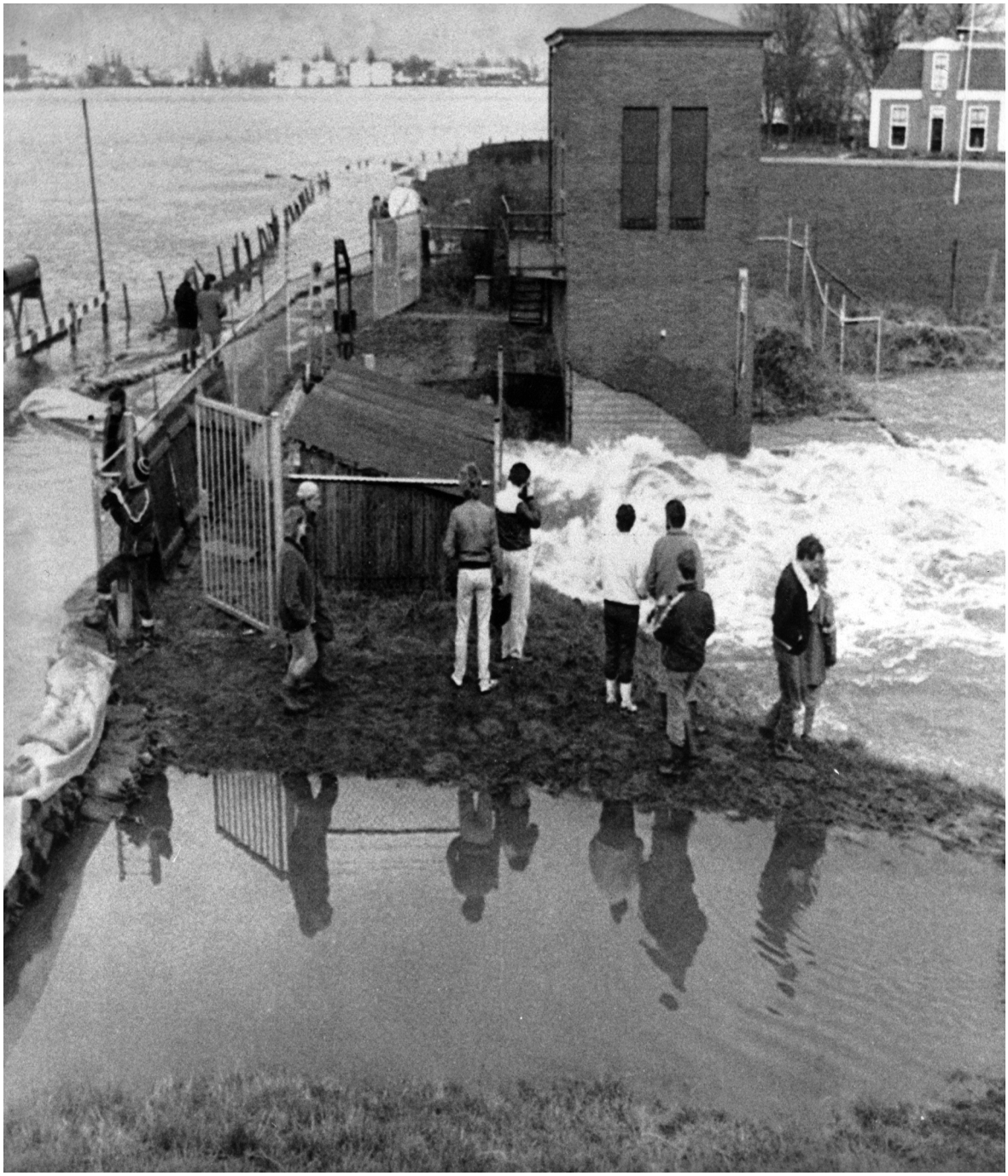
Variabelen staan cursief gedrukt. Stochastische variabelen en functies staan niet cursief gedrukt.

C_I	contante waarde van de investeringen, bestaande uit stichtingskosten en onderhoudskosten
C_R	contante waarde van het risico
C_t	totale kosten
C_{XX}	covariantiematrix van $\vec{X}$
$Cov(X_1, X_2)$	gemengde centrale moment of covariantie
$E(X)$	verwachtingswaarde X gemiddelde genoemd en aangeduid als μ_X
$F_{L_i}(t)$	kansverdeling van de levensduur van element i
F_X^{-1}	inverse kansverdeling van X
$F_X(X)$	onderschrijdingskans $P(X < X)$
$f_I(X_i \mid R)$	kansdichtheid van waarneming X_i bij gegeven sterkte R
$f_R^I(R)$	a priori kansdichtheid
$f_R^{II}(R)$	a posteriori kansdichtheid
$f_{\vec{X}}(\vec{X})$	gezamenlijke kansdichtheidsfunctie
$f_{X_2 \mid X_1}(X_2 \mid X_1)$	voorwaardelijke kansdichtheidsfunctie van X_2 gegeven $X_1 = X_1$
$H_{\vec{X}}(\vec{X})$	gezamenlijke Importance Sampling kansverdelingsfunctie
$h_{\vec{X}}(\vec{X})$	gezamenlijke Importance Sampling kansdichtheidsfunctie
J	determinant van Jacobi of de Jacobiaan
K_{act_i}	kosten van activiteit i
K_{var_i}	variabele kosten van activiteit i
K_{vast_i}	vaste kosten van activiteit i
$L(X \mid R)$	likelihood function
$\hat{m}_k$	schatter van de k^{de} centrale moment
N_a	aantal onafhankelijke locaties waar de activiteit plaatsheeft
n	totale aantal simulaties
n_f	aantal simulaties, waarbij $Z < 0$
$P(\vec{X})$	totale waarschijnlijkheid van de waarnemingen $\vec{X}$
$P_{d \mid f}$	kans op overlijden na falen
P_f	faalkans
$1 - P_f$	betrouwbaarheid
$P_1(t)$	kans dat een element op tijdstip t zich in toestand 1 bevindt
$p_X(X)$	kans dat de variabele X de waarde X zal aannemen
R	„sterkte" (resistance) of meer algemeen de weerstand tegen falen
R_i	sterkte van element i
R_{sys}	sterkte van het systeem
$R(\tau)$	sterkte op tijdstip τ
$r(\tau)$	voorwaardelijk faaltempo
S	„belasting" (sollicitation) ofwel datgene dat falen bevordert
$S_{i,rep}$	representatieve waarde van S_i

Cur frame Page 13 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

$S(\tau)$	belasting op tijdstip τ
T	testinterval
T_D	uitvaltijd (Down Time)
T_i	duur van activiteit i
U_i	niet-beschikbaarheid van element i
$U_{i,j}$	niet-beschikbaarheid van het systeem met de elementen i en j
V_X	variatiecoëfficiënt van X
Var(X)	variantie van X
$\vec{X}$	vector met basisvariabelen
X_i^*	waarde van X_i in het ontwerppunt
X_u	uniform verdeelde variabele tussen nul en één
Z	betrouwbaarheidsfunctie
$1(Z)$	indicatorfunctie
β	betrouwbaarheidsindex
β_i	beleidsfactor
ε	relatieve fout
ε	model-onzekerheid
θ_i	reparatieduur van element i
λ	eigenwaarde
λ_i	faaltempo element i
μ	verwachtingswaarde
$\mu_{g(X)}$	verwachtingswaarde van de gezamenlijke Importance Sampling functie
$\mu_{h(X)}$	verwachtingswaarde van de voorwaardelijke Importance Sampling functie
$\rho_{X_1X_2}$	correlatiecoëfficiënt
σ	standaardafwijking
σ_X	standaardafwijking van X
τ	tijdsduur van het testen
Φ	standaard normale verdeling
Φ^{-1}	inverse standaard normale verdeling
φ	standaard normale kansdichtheidsfunctie

Cur frame Page 14 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Inundatie van de Wilpse Kleipolder langs de IJssel ten gevolge van het bezwijken van sluisdeuren (31-3-'88).

Cur frame Page 15 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Hoofdstuk 1: Inleiding

1.1 DOELSTELLINGEN

Dit handboek risico-analyse heeft tot doel om probabilistische technieken toegankelijk te maken voor de ontwerper en de besluitvormer. Het handboek geeft een overzicht van de huidige kennis met betrekking tot rekentechnieken en de verschillende onderdelen van een risico-analyse.
Bij het schrijven van het handboek is de toepassing in de civiele techniek als uitgangspunt gehanteerd. Door de brede opzet en de keuze van de voorbeelden is het handboek ook goed bruikbaar voor andere vakgebieden.
De doelgroep van het handboek bestaat uit:

- besluitvormers;
- beleidsmakers;
- regelgevers;
- opdrachtgevers;
- bouwondernemers;
- ingenieurs en adviseurs;
- verzekeraars en financiers;
- studenten en docenten.

1.2 THEORIE VOOR DE PRAKTIJK

Het handboek is vaktechnisch van aard en geschreven vanuit het oogpunt van de ontwerper en de besluitvormer. De theorie, die onontbeerlijk is voor het uitvoeren van een risico-analyse, is aan de hand van diverse voorbeelden geïllustreerd. Naast het verduidelijken van de theorie zijn de voorbeelden bedoeld om de lezer te prikkelen de theorie voor verschillende problemen toe te passen.
Het handboek geeft een handreiking voor de probabilistische aanpak van ontwerp- en beslissingsproblemen. Het geven van vaste procedures voor het uitvoeren van een risico-analyse is, door de diversiteit van de problemen, niet mogelijk. Met behulp van het handboek kan de gebruiker de meest geëigende technieken kiezen voor het uitvoeren van een analyse van zijn specifieke probleem.

1.3 OVERZICHT VAN DE INHOUD

Voor het handboek is een structuur gekozen, waarbij na een korte omschrijving van de aanpak van een risico-analyse, de bouwstenen in detail worden beschreven. Deze opzet maakt het handboek geschikt als naslagwerk en als studieboek.
Voor het uitvoeren van een risico-analyse is het van belang om kennis te hebben van de kansrekening. Hoofdstuk 2 geeft een beknopt overzicht van belangrijke definities en theorieën.

Cur frame Page 16 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

In hoofdstuk 3 wordt ingegaan op de verschillende onderdelen waaruit een risico-analyse kan bestaan. Afhankelijk van het specifieke probleem waarvoor een risico-analyse wordt gemaakt, zal de keuze van de bouwstenen van de analyse variëren.
Een risico-analyse is een beslissingsondersteunend gereedschap dat rationele beslissingen mogelijk maakt. Hoofdstuk 4 geeft een inleiding in beslissingstheorie en het referentiekader met betrekking tot externe veiligheid als één van de randvoorwaarden bij de besluitvorming.
Het kwantificeren van risico's houdt in dat de betrouwbaarheid van bepaalde systemen en processen moeten worden geanalyseerd. Daar het vaak niet mogelijk is om directe uitspraken te doen over de totale betrouwbaarheid van een systeem, kan het systeem worden onderverdeeld in verschillende elementen, die afzonderlijk worden beschouwd. Hoofdstuk 5 geeft verschillende rekentechnieken die ter beschikking staan om de betrouwbaarheid van een element vast te stellen.
De betrouwbaarheid van het totale systeem volgt uit de betrouwbaarheid van de elementen en hun onderlinge samenhang. Hoofdstuk 6 behandelt de systeemanalyse en de berekening van de betrouwbaarheid van systemen.
In de hoofdstukken 5 en 6 is bij de analyse van de betrouwbaarheid van elementen en systemen steeds uitgegaan van oncorrigeerbare processen. In veel gevallen is het echter mogelijk om de betrouwbaarheid van een systeem in de tijd te corrigeren. Hoofdstuk 7 behandelt de betrouwbaarheid van tijdsafhankelijke systemen, waarbij het ingrijpen door het veranderen van het systeem leidt tot risicoverandering.
In hoofdstuk 8 is ten slotte nog een aantal toepassingsgebieden op een rijtje gezet, waarbij de risico-analyse van belang is.

1.4 LEESWIJZER

Voor degene die een risico-analyse moet uitvoeren, waarbij het risico moet worden gekwantificeerd, is het raadzaam het hele boek te lezen, met dien verstande dat hoofdstuk 2 kan worden overgeslagen bij een goede kennis van de kansrekening.
De lezer die zich beperkt tot het maken van een kwalitatieve risico-analyse, kan de hoofdstukken 2 en 5 en enkele delen van hoofdstuk 6 met betrekking tot het berekenen van faalkansen overslaan.
De lezer die alleen kennis wil nemen van de risico-analyse, maar die zelf niet wil uitvoeren, kan zich beperken tot de hoofdstukken 3, 4 en 8. Hierbij wordt toch geadviseerd de voorbeelden in de hoofdstukken 5, 6 en 7 te bekijken om een beeld te verkrijgen van de mogelijkheden.

Cur frame Page 17 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Cur frame Page 18 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De 'Bijlmerramp'; het neerstorten van een El-Al vrachtvliegtuig op een flatgebouw in de Bijlmermeer (6-10-'92).

Cur frame Page 19 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Hoofdstuk 2: Kansrekening

2.1 KANSBEGRIP

2.1.1 KANSDEFINITIE VAN LAPLACE

De klassieke kansdefinitie van Laplace (1812) luidt:
„Als bij een experiment in totaal n verschillende en even waarschijnlijke uitkomsten mogelijk zijn, en als bij precies m van die n uitkomsten de gebeurtenis E optreedt, dan is de kans op deze gebeurtenis gelijk aan m/n". Kortweg wordt dit geschreven als:

$$\text{kans} = \frac{\text{aantal uitkomsten waarbij de gebeurtenis E optreedt}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}} \tag{2.1}$$

In de definitie van Laplace is sprake van „even waarschijnlijke uitkomsten". Onder dit begrip wordt in feite verstaan dat alle uitkomsten een gelijke kans moeten hebben. Dit betekent dat in deze kansdefinitie reeds gebruik is gemaakt van het begrip kans. Bovendien is de kans op een gebeurtenis niet gedefinieerd als de uitkomsten niet even waarschijnlijk zijn.
Het zal derhalve duidelijk zijn dat er behoefte is aan een nadere formulering van het kansbegrip.

2.1.2 EXPERIMENTELE KANSDEFINITIE

In het geval een experiment n maal wordt uitgevoerd, waarbij m maal de gebeurtenis E optreedt, is het frequentiequotiënt van de gebeurtenis E gelijk aan m/n.
De experimentele wet van de grote aantallen zegt dat voor toenemende n de waarde van het frequentiequotiënt van een bepaalde gebeurtenis zich met steeds kleinere variaties zal gaan bewegen om een vaste waarde. In formulevorm:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} \tag{2.2}$$

Een bezwaar van de bepaling van kansen volgens deze definitie is het grote aantal experimenten dat nodig is voor een betrouwbare schatting.

2.1.3 DEFINITIE VAN HET KANSBEGRIP MET BEHULP VAN AXIOMA'S

Het kansbegrip kan worden ingevoerd aan de hand van een aantal basisregels, die als axioma's worden opgelegd. Alvorens de kansaxioma's te noemen, moeten enkele begrippen worden toegelicht.
Bij elk experiment wordt een uitkomstenruimte Ω gedefinieerd, met alle te onderscheiden uitkomsten. Een gebeurtenis E treedt op als de uitkomst van het experiment voldoet aan de omschrijving van E. De bij E behorende uitkomsten vormen een deelverzameling van Ω.
De uitkomst van het experiment is zeker een element van Ω, daarom wordt Ω de zekere gebeurtenis genoemd.

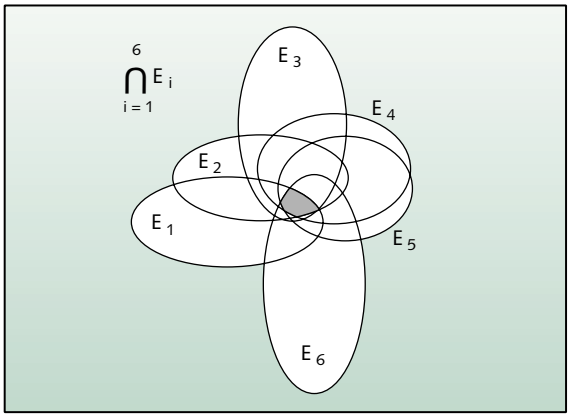
Cur frame Page 20 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De lege verzameling ø, die geen uitkomst van het experiment bevat, wordt de onmogelijke gebeurtenis genoemd.
De complementaire gebeurtenis $\bar{E}$ is de gebeurtenis dat E niet optreedt.

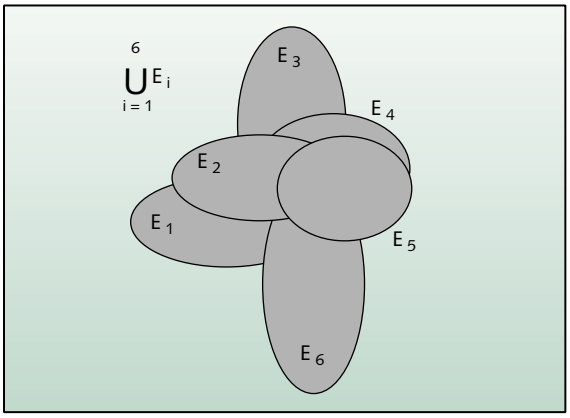
De doorsnijding

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_i \text{ van } E_1, E_2, \ldots, E_n$$

is de gebeurtenis dat elk van deze gebeurtenissen optreedt. In het Venn-diagram van figuur 2.1 is de doorsnede van zes gebeurtenissen aangegeven door het gerasterde deel.



Figuur 2.1 *Doorsnijding.*



Figuur 2.2 *Vereniging.*

De vereniging

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \text{ van } E_1, E_2, \ldots, E_n$$

is de gebeurtenis dat minstens één van deze gebeurtenissen optreedt (zie gerasterde deel van fig. 2.2).
Als $E_1 \cap E_2 = ø$, dan worden E_1 en E_2 elkaar uitsluitende of disjuncte gebeurtenissen genoemd.
De definitie van de kans met behulp van axioma's luidt:

„De kans is een functie, gesymboliseerd door de letter P, die aan iedere deelverzameling E met een aantal gebeurtenissen van de totaalverzameling Ω met alle mogelijke gebeurtenissen, een getal toevoegt".

Cur frame Page 21 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Dit getal is een maat voor de waarschijnlijkheid van het optreden van E. De functie moet voldoen aan drie kansaxioma's, te weten:

$$P(E) \geq 0 \qquad (\forall E \in \Omega) \tag{2.3}$$

$$P(\Omega) = 1 \tag{2.4}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i), \text{ als de gebeurtenissen } E_i \text{ disjunct zijn.} \tag{2.5}$$

Met behulp van deze kansaxioma's zijn de regels voor de kansrekening gedefinieerd. In bijlage A zijn deze rekenregels vermeld.

2.1.4 SUBJECTIEF KANSBEGRIP

In veel gevallen is een wiskundige onderbouwing van de kans op een bepaalde gebeurtenis E niet mogelijk. De oorzaak ligt dan in het ontbreken van relevante statistische gegevens. In het algemeen zal in een dergelijk geval de bepaling van de kans op zo'n gebeurtenis een zaak zijn van gevoelsmatige overwegingen. Er is dan sprake van een subjectieve kans.
Ook in het geval een kans met behulp van statistieken wordt bepaald kan er sprake zijn van subjectiviteit. Dit is bijvoorbeeld het geval als iemand niet over alle relevante informatie beschikt of wanneer omwille van de eenvoud slechts een deel van de beschikbare informatie wordt gebruikt.
Het subjectieve kansbegrip is doorgaans een controversieel onderwerp in discussies tussen wiskundigen en gebruikers van de statistiek. Voor risico-analisten is het meestal onvermijdelijk om gebruik te maken van het subjectieve kansbegrip.
Doorgaans zullen gevoelsmatige overwegingen worden gecombineerd met beschikbare statistische informatie. De grondslag voor het maken van een dergelijke combinatie is gelegd door Thomas Bayes.
De methode staat dan ook bekend als de Bayesiaanse methode (zie bijlage C).

2.2 STOCHASTISCHE VARIABELEN

2.2.1 TYPEN STOCHASTISCHE VARIABELEN

Als de mogelijke uitkomsten van een experiment in de vorm van getallen worden toegekend aan een variabele wordt gesproken van een stochastische variabele. De stochastische variabele wordt gekenmerkt door een functie die de waarschijnlijkheid van de uitkomsten van het experiment beschrijft. Het domein van een dergelijke functie kan discreet of continu zijn. Afhankelijk hiervan wordt gesproken van discrete of continue stochastische variabelen.

Cur frame Page 22 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

2.2.2 KANSMASSAFUNCTIE, KANSVERDELINGSFUNCTIE EN KANSDICHTHEIDSFUNCTIE

Bij discrete stochastische variabelen is het mogelijk om de kans te definiëren dat de variabele een bepaalde waarde zal aannemen. Dit gebeurt met de kansmassafunctie:

$$p_X(X) = P(X = X), \qquad X \in R \tag{2.6}$$

In feite staat hier dat $p_X(X)$ de kans is dat de variabele X de waarde X zal aannemen.
Uit de kansaxioma's volgt direct dat:

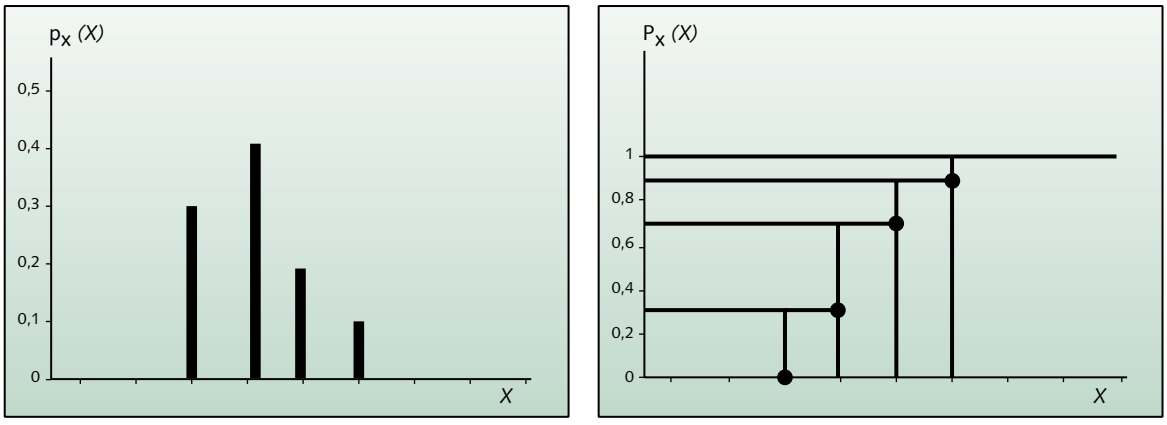
$$0 \le p_X(X) \le 1 \tag{2.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_X(X_i) = 1 \tag{2.8}$$

$$P(a < X \le b) = \sum_{X_i \le b} p_X(X_i) - \sum_{X_i \le a} p_X(X_i) \tag{2.9}$$

De kansverdelingsfunctie van een stochastische variabele geeft de kans dat deze variabele kleiner dan of gelijk is aan een bepaalde waarde (zie fig. 2.3). De kansverdelingsfunctie van X is gerelateerd aan de kansmassafunctie door:

$$P_X(X) = P(X \le X) = \sum_{X_i \le X} p_X(X_i), \qquad X \in R \tag{2.10}$$



Figuur 2.3 *Kansmassafunctie en kansverdelingsfunctie.*

Een continue stochastische variabele kan oneindig veel waarden aannemen (zelfs binnen een klein domein). De kans dat de variabele precies een bepaalde waarde aanneemt, is daarom nul. De kansmassafunctie van een

Cur frame Page 23 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

continue stochastische variabele heeft dus geen waarde. De kansverdelingsfunctie blijft echter te definiëren als:

$$F_X(X) = P(X \leq X), \qquad X \in \mathrm{R} \tag{2.11}$$

Uit de kansaxioma's volgt:

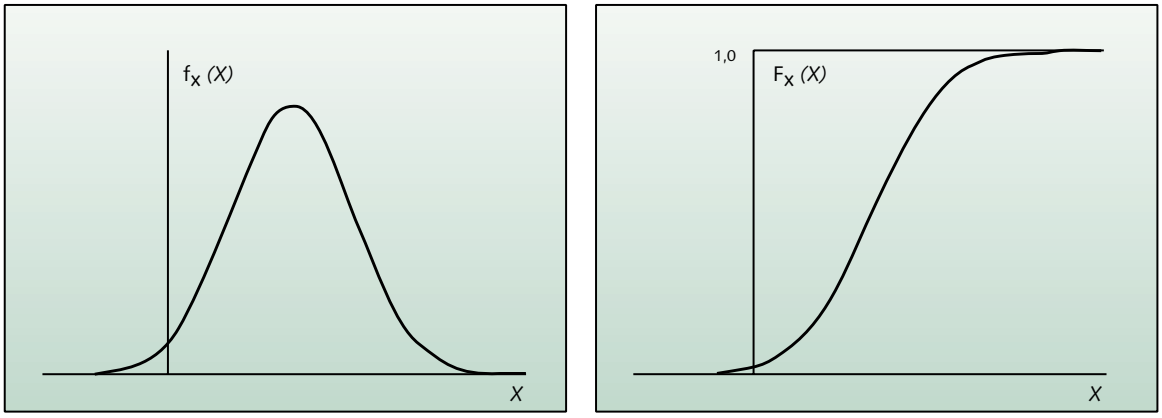
$$F_X(\infty) = 1 \tag{2.12}$$

$$F_X(-\infty) = 0 \tag{2.13}$$

$F_X(X)$ is monotoon niet dalend.

Het is over het algemeen handig om de afgeleide van de kansverdelingsfunctie te kennen, omdat de rekenregels voor kansen (kansmassafuncties) ook geldig zijn voor de afgeleide functie. Deze afgeleide wordt de kansdichtheidsfunctie genoemd en wordt gedefinieerd door (zie fig. 2.4):

$$f_X(X) = \frac{dF_X(X)}{dX}, \qquad X \in \mathrm{R} \tag{2.14}$$



Figuur 2.4 *Kansdichtheidsfunctie en kansverdelingsfunctie.*

Voor de kansdichtheidsfunctie geldt:

$$f_X(-\infty) = 0 \tag{2.15}$$

$$f_X(\infty) = 0 \tag{2.16}$$

Cur frame Page 24 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

$$f_X(X) \geq 0, \qquad X \in R \tag{2.17}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X)dX = 1 \tag{2.18}$$

Er zijn kansverdelingen, waarbij de kansdichtheidsfunctie is gedefinieerd, maar waarbij de kansverdelingsfunctie alleen kan worden gepresenteerd als:

$$F_X(X) = \int_{-\infty}^{X} f_X(t)dt$$

omdat de integraal geen analytische oplossing heeft. Dit onderstreept nogmaals het belang van de kansdichtheidsfunctie. In bijlage B zijn enkele veel voorkomende kansverdelingstypen met bijbehorende kansdichtheidsfuncties gegeven.

2.2.3 MOMENTEN

Een stochastische variabele wordt gedefinieerd door zijn kansverdeling. Voor het beoordelen van en rekenen met stochastische variabelen is het dikwijls handig om ook een aantal, uit de kansverdeling af te leiden, parameters te kennen. De stochastische variabele wordt dan volledig bepaald door het kansverdelingstype en de parameters.
In de praktijk blijkt het zelfs eenvoudiger te zijn om schattingen te maken van deze parameters dan van de exacte kansverdeling.

De verwachtingswaarde van een stochastische variabele X wordt gedefinieerd door:

$$E(X) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} X f_X(X)dX}{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X)dX} \tag{2.19}$$

Dit is het bepalen van het gewogen gemiddelde van X of de *X*-coördinaat van het zwaartepunt van de kansdichtheidsfunctie. De verwachtingswaarde van X wordt daarom ook het gemiddelde genoemd en aangeduid als μ_x.
Daar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X)dX = 1$$

geldt:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X f_X(X)dX \tag{2.20}$$

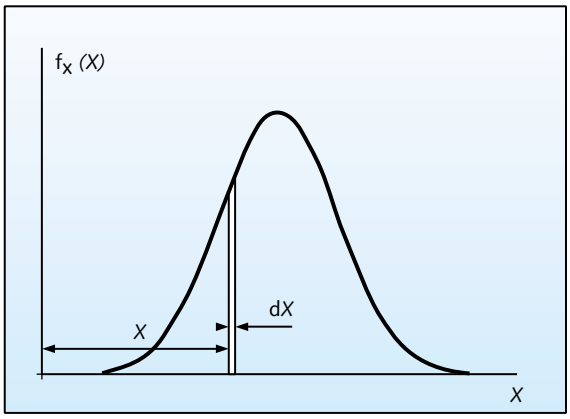
Cur frame Page 25 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

hetgeen overeenkomt met het bepalen van het statisch moment van de kansdichtheidsfunctie ten opzichte van de as $X = 0$ (zie fig. 2.5). Om deze reden wordt de verwachtingswaarde van X ook wel aangeduid als het eerste moment.
Op dezelfde wijze kan $E(X^2)$ worden bepaald. Dit komt overeen met het traagheidsmoment van de kansdichtheidsfunctie ten opzichte van de as $X = 0$ en wordt daarom aangeduid als het tweede moment.
In het algemeen wordt het k^{de} moment gedefinieerd door:

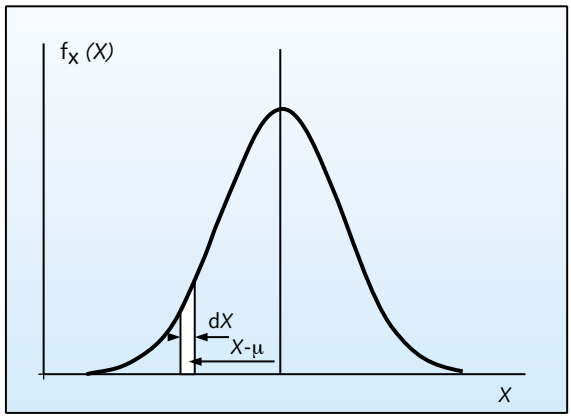
$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} X^k f_X(X)dX \tag{2.21}$$

Analoog hieraan kunnen de momenten worden uitgerekend ten opzichte van de as $X = \mu_X$ (zie fig. 2.6). Deze momenten worden de centrale momenten genoemd, de algemene formulering luidt:

$$m_k = E\left((X-\mu_X)^k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (X-\mu_x)^k f_X(X)dX \tag{2.22}$$



Figuur 2.5 *Eerste moment.*



Figuur 2.6 *Eerste centrale moment.*

Het eerste centrale moment is per definitie gelijk aan nul. Het tweede centrale moment wordt de variantie genoemd en wordt aangeduid als Var(X) of σ_x^2:

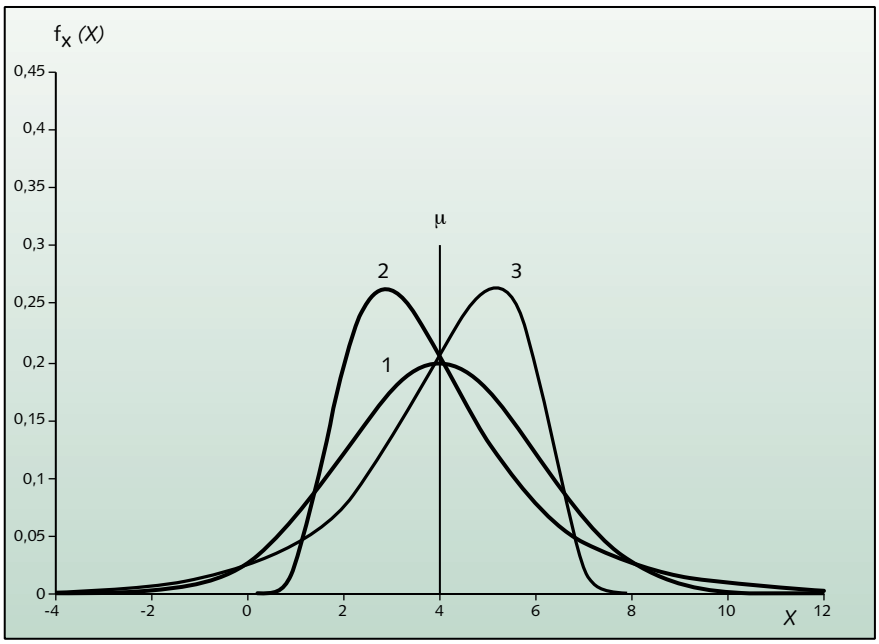
$$Var(X) = \sigma_X^2 = E\left((X-\mu_X)^2\right) \tag{2.23}$$

De positieve vierkantswortel van de variantie, σ_x, wordt de standaardafwijking genoemd en is een maat voor de spreiding rond het gemiddelde. Bij de beoordeling van de spreiding van een stochastische variabele rond het gemiddelde is niet zozeer de absolute waarde van de standaardafwijking van belang, maar meer de relatieve waarde ten opzichte van het gemiddelde.
Deze relatieve waarde wordt weergegeven door de variatiecoëfficiënt V_X, die is gedefinieerd als:

$$V_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \tag{2.24}$$

Cur frame Page 26 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

In het geval dat $\mu_x \leq 0$ heeft de variatiecoëfficiënt geen waarde, er is dan echter ook geen behoefte aan een relatieve waarde van de standaardafwijking.
Het derde genormeerde centrale moment $\beta_1 = m_3^2/\sigma^3$ is een maat voor de asymmetrie of scheefheid (skewness) en het genormeerde vierde centrale moment $\beta_2 = m_4/\sigma^2$ is een maat voor de gepiektheid van de kansdichtheidsfunctie.
In figuur 2.7 zijn staan drie verschillende kansdichtheidsfuncties getekend met hetzelfde gemiddelde en dezelfde standaardafwijking.



Figuur 2.7 *Scheefheid en gepiektheid.*

Het genormeerde derde centrale moment is bij kansdichtheidsfunctie 1 gelijk aan nul, deze functie is symmetrisch ten opzichte van het gemiddelde. Kansdichtheidsfunctie 2 is scheef naar rechts en het derde centrale moment is daarom positief. Bij kansdichtheidsfunctie 3 ligt de staart links van het gemiddelde en is het derde centrale moment negatief.
De genormeerde vierde centrale momenten van de kansdichtheidsfuncties 2 en 3 zijn groter dan die van functie 1.

2.3 STOCHASTISCHE VECTOREN

Onder een stochastische vector wordt verstaan een set van stochastische variabelen, te schrijven als:

$$\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{2.25}$$

De stochastische vector is dus een multidimensionale stochastische variabele. Stochastische vectoren kunnen zowel discrete als continue stochastische variabelen bevatten. Tussen de stochastische variabelen van een

Cur frame Page 27 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

vector kunnen fysische relaties bestaan. In een dergelijk geval is er sprake van afhankelijke variabelen. Als de relatie exact bekend is, is het mogelijk om een vector met afhankelijke variabelen te schrijven als een vector met onafhankelijke variabelen door middel van substitutie van de fysische relaties in de vector.
De relaties tussen stochastische variabelen zijn in de praktijk dikwijls niet exact bekend. Uit statistische gegevens blijkt bijvoorbeeld dat, wanneer een variabele een bepaalde waarde heeft aangenomen, dit consequenties heeft voor de kansverdeling van een andere variabele. In een dergelijk geval is sprake van een stochastische afhankelijkheid. Het zal duidelijk zijn dat een exact bekende fysische afhankelijkheid ook stochastische afhankelijkheid impliceert. Net als de ééndimensionale stochastische variabele wordt de stochastische vector gedefinieerd door een kansverdelingsfunctie. De kansverdelingsfunctie voor een vector luidt:

$$\begin{aligned} F_{\vec{X}}(\vec{X}) &= F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\ &= P\Big((X_1 \le X_1) \cap (X_2 \le X_2) \cap \ldots \cap (X_n \le X_n)\Big) = P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \le X_i)\Big) \end{aligned} \tag{2.26}$$

De gezamenlijke kansdichtheidsfunctie van de stochastische vector is:

$$f_{\vec{X}}(\vec{X}) = \frac{\partial^n F_{\vec{X}}(\vec{X})}{\partial X_1 \partial X_2 \ldots \partial X_n} \tag{2.27}$$

Omgekeerd geldt dan uiteraard:

$$F_{\vec{X}}(\vec{X}) = \int_{-\infty}^{X_1} \int_{-\infty}^{X_2} \ldots \int_{-\infty}^{X_n} f_{\vec{X}}(\vec{x}) dx_n \ldots dx_2 dx_1 \tag{2.28}$$

De kansverdelingsfunctie van de enkele stochastische variabele X_1 kan worden bepaald met:

$$F_{X_1}(X_1) = \int_{-\infty}^{X_1} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x}) dx_n \ldots dx_2 dx_1 \tag{2.29}$$

Door partiële differentiatie wordt de marginale kansdichtheidsfunctie van X_1 gevonden:

$$f_{X_1}(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x}) dx_n \ldots dx_3 dx_2 \tag{2.30}$$

In het voorgaande is er van uitgegaan dat de kansverdelingsfunctie of de kansdichtheidsfunctie van de stochastische vector bekend is. Uit de kansdichtheidsfunctie van de stochastische vector zijn de marginale kansdichtheidsfuncties te bepalen. In de praktijk komt het echter veel voor dat de interesse uitgaat naar een stochastische vector, die bestaat uit een aantal stochastische variabelen, waarvan de marginale kansdichtheidsfuncties bekend zijn.
In bijlage A is de kans dat twee gebeurtenissen beide op zullen treden beschreven met:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2) P(E_1 | E_2) \tag{2.31}$$

Cur frame Page 28 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Conform deze formulering is de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie van een vector van twee stochastische variabelen X_1 en X_2 te schrijven als:

$$f_{X_1, X_2}(X_1, X_2) = f_{X_1}(X_1) f_{X_2|X_1}(X_2|X_1) \tag{2.32}$$

Hierin is $f_{X_2|X_1}(X_2|X_1)$ de voorwaardelijke kansdichtheidsfunctie van X_2 gegeven $X_1 = X_1$:

$$f_{X_2|X_1}(X_2|X_1) = \frac{f_{X_1, X_2}(X_1, X_2)}{f_{X_1}(X_1)} \tag{2.33}$$

Als de variabelen X_1 en X_2 stochastisch onafhankelijk zijn, geldt:

$$f_{X_2, X_1}(X_2|X_1) = f_{X_2}(X_2) \tag{2.34}$$

In dat geval is de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie gedefinieerd door het product van de marginale kansdichtheidsfuncties:

$$f_{X_1, X_2}(X_1, X_2) = f_{X_1}(X_1) f_{X_2}(X_2) \tag{2.35}$$

Deze vergelijking is eenvoudig uit te breiden voor vectoren met n stochastisch onafhankelijke variabelen:

$$f_{\vec{X}}(\vec{X}) = f_{X_1}(X_1) f_{X_2}(X_2) \ldots f_{X_n}(X_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(X_i) \tag{2.36}$$

Bij stochastisch afhankelijke variabelen geven de marginale kansdichtheidsfuncties onvoldoende informatie om de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie te kunnen bepalen.
Ter karakterisering van de kansdichtheidsfunctie van $\vec{X}$ wordt, evenals bij de marginale kansdichtheidsfuncties, gebruik gemaakt van gemiddelden en varianties.
De verwachtingswaarden van de variabelen van een stochastische vector worden analoog aan vergelijking (2.20) gedefinieerd door:

$$E(X_i) = \mu_{X_i} = \int_{-\infty}^{\infty} X_i f_{X_i}(X_i) dX_i \tag{2.37}$$

De varianties worden bepaald door:

$$\sigma_{X_i}^2 = E((X_i - \mu_{X_i})^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (X_i - \mu_{X_i})^2 f_{X_i}(X_i) dX_i \tag{2.38}$$

Naast de varianties van de enkelvoudige stochastische variabelen speelt het gemengde centrale moment of covariantie een belangrijke rol. Deze is gedefinieerd door:

$$Cov(X_1, X_2) = E((X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})) = E(X_1 X_2) - \mu_{X_1} \mu_{X_2} \tag{2.39}$$

Cur frame Page 29 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De correlatiecoëfficiënt is een van de covariantie en de varianties afgeleide parameter, deze luidt:

$$\rho_{X_1, X_2} = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \tag{2.40}$$

Deze coëfficiënt is een maat voor de lineaire afhankelijkheid tussen twee stochastische variabelen. Als $\rho_{X_1,X_2} = 0$, dan zijn de variabelen lineair ongecorreleerd.
In het geval dat de variabelen X_1 en X_2 stochastisch onafhankelijk zijn, geldt:

$$\begin{aligned} E(X_1X_2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X_1X_2 f_{\vec{X}}(X_1X_2)dX_1dX_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X_1X_2 f_{X_1}(X_1)f_{X_2}(X_2)dX_1dX_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_2 f_{X_2}(X_2)\int_{-\infty}^{\infty} X_1 f_{X_1}(X_1)dX_1X_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E(X_1)X_2 f_{X_2}(X_2)dX_2 = E(X_1)E(X_2) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Hieruit volgt dat de covariantie, volgens vergelijking (2.39), nul is. Voor stochastisch onafhankelijke variabelen is de correlatiecoëfficiënt dus gelijk aan nul. Het is echter niet zo dat als twee variabelen lineair ongecorreleerd zijn, deze dan ook per definitie stochastisch onafhankelijk zijn.
Bij stochastische vectoren met twee of meer variabelen kunnen de onderlinge lineaire correlaties tussen de variabelen worden beschreven met de covariantie-matrix, gegeven door:

$$C_{XX} = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \ldots\ldots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & \ldots\ldots & \mathrm{Cov}(X_2, X_n) \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \mathrm{Cov}(X_n, X_1) & \mathrm{Cov}(X_n, X_2) & \ldots\ldots & \mathrm{Var}(X_n) \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

waarin:

$$\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Cov}(X_1, X_1).$$

Als de covariantie-matrix alleen waarden heeft op de diagonaal, dan is er sprake van ongecorreleerde basisvariabelen.
Met behulp van de lineaire algebra is het mogelijk om de set met gecorreleerde variabelen te transformeren naar een set ongecorreleerde variabelen. Deze transformatie luidt:

$$\vec{Y} = A^T\vec{X} \tag{2.43}$$

Cur frame Page 30 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

waarin:

- $\vec{X}$ is de vector met gecorreleerde basisvariabelen;
- A is de matrix met de orthonormale eigenvectoren van C_{xx} als kolomvectoren;
- C_{xx} is de covariantiematrix van $\vec{X}$;
- $\vec{Y}$ is de vector met ongecorreleerde basisvariabelen.

De verwachtingswaarden van de ongecorreleerde basisvariabelen worden bepaald met:

$$E(\vec{Y}) = A^T E(\vec{X}) \tag{2.44}$$

De covariantiematrix van $\vec{Y}$ bevat op de diagonaal de varianties die gelijk zijn aan de eigenwaarden van C_{xx}.

2.4 FUNCTIES VAN STOCHASTISCHE VARIABELEN

2.4.1 FUNCTIES VAN ÉÉN STOCHASTISCHE VARIABELE

In de praktijk heeft de risico-analist dikwijls te maken met functies van stochastische variabelen. Bij gevolg is een functie Y van X ook weer een stochastische variabele.
In 2.2.3 zijn de k^{de} momenten gedefinieerd als de verwachtingswaarden van X^k. Als in vergelijking (2.21) X^k wordt vervangen door een willekeurige functie $Y = g(X)$, is de verwachtingswaarde van de variabele Y gedefinieerd door:

$$E(Y) = \mu_Y = \int_{-\infty}^{\infty} Y f_X(X) dX = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) f_X(X) dX \tag{2.45}$$

Voor lineaire functies $g(X)$ geldt:

$$\mu_Y = g(\mu_X) \tag{2.46}$$

Het k^{de} centrale moment van de functie Y wordt bepaald door:

$$E\left((Y-\mu_Y)^k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (Y-\mu_Y)^k f_X(X) dX \tag{2.47}$$

De variantie van Y is dus:

$$Var(Y) = E\left((Y-\mu_Y)^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (Y-\mu_Y)^2 f_X(X) dX \tag{2.48}$$

Voor de lineaire functie $Y = aX + b$ geldt:

$$Var(Y) = E\left(\left(g(X)-g(\mu_X)\right)^2\right) = E\left((aX+b-a\mu_X-b)^2\right) = a^2\sigma_X^2 \tag{2.49}$$

Cur frame Page 31 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Bij niet-lineaire functies kan de functie worden benaderd met behulp van een Taylor-polynoom in het gemiddelde van *X*. Deze luidt:

$$g(X) \approx g(\mu_X) + \frac{dg(\mu_X)}{dX}(X-\mu_X) + \frac{1}{2!}\frac{d^2g(\mu_X)}{dX^2}(X-\mu_X)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\frac{d^ng(\mu_X)}{dX^n}(X-\mu_X)^n \qquad (2.50)$$

Vervolgens kan van de polynoom de verwachtingswaarde worden bepaald als benadering van de verwachtingswaarde van Y:

$$E(Y) \approx \int_{-\infty}^{\infty}\left(g(\mu_X) + \frac{dg(\mu_X)}{dX}(X-\mu_X) + \frac{1}{2!}\frac{d^2g(\mu_X)}{dX^2}(X-\mu_X)^2 \ldots + \frac{1}{n!}\frac{d^ng(\mu_X)}{dX^n}(X-\mu_X)^n\right) f_X(X)dX$$
$$= g(\mu_X) + \frac{1}{2!}\frac{d^2g(\mu_X)}{dX^2}E\left((X-\mu_X)^2\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{d^ng(\mu_X)}{dX^n}E((X-\mu_X)^n) \qquad (2.51)$$

De benadering van de verwachtingswaarde van Y is dus een functie van het gemiddelde en de centrale momenten van X. Als de functie wordt benaderd door de eerste twee termen van de Taylor-polynoom is er sprake van een lineaire functie:

$$g(X) \approx g(\mu_X) + \frac{dg(\mu_X)}{dX}(X-\mu_X) \qquad (2.52)$$

De verwachtingswaarden van Y laat zich daar benaderen door:

$$E(Y) \approx g(\mu_X) \qquad (2.53)$$

Deze benadering staat bekend als de Mean Value benadering.
Door substitutie van de afgeleide van *g*(X) voor a in vergelijking (2.49) wordt een benadering voor de standaardafwijking van Y gevonden:

$$Var(Y) \approx \left(\frac{dg(\mu_X)}{dX}\right)^2 \sigma_X^2 \qquad (2.54)$$

Met het voorgaande zijn dus het gemiddelde en de standaardafwijking van Y exact te bepalen of te benaderen. Als de functie *g*(X) monotoon is, is de kansverdelingsfunctie gegeven door:

$$F_Y(Y) = P(Y \le Y) = P\left(X \le g^{-1}(Y)\right) = F_X\left(g^{-1}(Y)\right) \qquad (2.55)$$

De kansdichtheidsfunctie van Y is af te leiden door substitutie van vergelijking (2.55) in vergelijking (2.14), dit geeft:

$$f_Y(Y) = \frac{dF_Y(Y)}{dY} = \frac{dF_X\left(g^{-1}(Y)\right)}{dY} = f_X\left(g^{-1}(Y)\right)\left|\frac{dg^{-1}(Y)}{dY}\right| = f_X(X)\left|\frac{dX}{dY}\right| \qquad (2.56)$$

Cur frame Page 32 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Met behulp van deze vergelijkingen kunnen de eigenschappen van een stochastische variabele Y, die een functie is van een andere stochastische variabele X, worden bepaald.

2.4.2 FUNCTIES VAN $R^n \rightarrow R^n$

Gegeven is een stochastische vector $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ die een functie $\vec{g} = (g_1, g_2, ..., g_n)$ is van $\vec{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$, zodat:

$$Y_i = g_i(X_1, X_2, ..., X_n) \tag{2.57}$$

In 2.4.1 zijn formules gegeven voor de verwachtingswaarde en de kansdichtheidsfunctie van een functie van een stochastische variabele. Op geheel analoge wijze kunnen de verwachtingswaarde en de kansdichtheidsfunctie voor een functie van een stochastische vector worden bepaald.
De verwachtingswaarde van $\vec{Y}$ wordt bepaald door:

$$E(\vec{Y}) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \vec{g}(\vec{X}) f_X(\vec{X}) dX_1 ... dX_n \tag{2.58}$$

De kansdichtheidsfunctie van $\vec{Y}$ wordt gegeven door:

$$f_{\vec{Y}}(\vec{Y}) = f_{\vec{X}}(\vec{X}) \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial Y_1} & ..... & \frac{\partial X_1}{\partial Y_n} \\ . & & . \\ . & & . \\ \frac{\partial X_n}{\partial Y_1} & ..... & \frac{\partial X_n}{\partial Y_n} \end{vmatrix} \tag{2.59}$$

De determinant met de partiële afgeleiden staat bekend als de determinant van Jacobi of de Jacobiaan en wordt geschreven als J. Vergelijking (2.59) is nu eenvoudig te schrijven:

$$f_{\vec{Y}}(\vec{Y}) = f_{\vec{X}}(\vec{X})|J| \tag{2.60}$$

Hoewel de formulering er betrekkelijk eenvoudig uitziet, blijkt in de praktijk het bepalen van $f_{\vec{Y}}(\vec{Y})$ doorgaans zeer rekenintensief te zijn.

2.4.3 FUNCTIES VAN $R^n \rightarrow R^1$

In veel gevallen is de risico-analist geïnteresseerd in de kansverdeling van een stochastische variabele Y die is gedefinieerd als een functie van een stochastische vector $\vec{X}$:

$$Y = g(\vec{X}) \,|\, g: R^n \rightarrow R^1 \tag{2.61}$$

De kansdichtheidsfunctie kan worden gevonden door eerst een functie van $R^n \rightarrow R^n$ te beschouwen. Stel:

$$Y_1 = g(\vec{X}) \text{ en } Y_i = X_{i-1}, \quad \text{voor } i = 2, 3, ..., n \tag{2.62}$$

Cur frame Page 33 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Als de functie $g(\vec{X})$ monotoon is, is het mogelijk om de volgende inverse functies te definiëren:

$$\begin{aligned} X_i &= Y_{i+1} \qquad \text{voor} \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ X_n &= g^{-1}(\vec{Y}) = h(\vec{Y}) = h(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = h(Y_1, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) \end{aligned} \tag{2.63}$$

Door middel van partiële differentiatie van de functies van X_i kan de Jacobiaan worden gedefinieerd:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial X_1}{\partial Y_2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial X_2}{\partial Y_3} & \ldots & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ \frac{\partial X_n}{\partial Y_1} & . & . & . & \frac{\partial X_n}{\partial Y_n} \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

De kansdichtheidsfunctie van $\vec{Y}$ is:

$$\begin{aligned} f_{\vec{Y}}(\vec{Y}) &= f_{\vec{X}}(\vec{X})|J| \\ &= f_{\vec{X}}(X_1, X_2, \ldots, X_n)|J| \\ &= f_{\vec{X}}\Big(X_1, X_2, \ldots, h(Y_1, X_1, \ldots, X_{n-1})\Big)|J| \end{aligned} \tag{2.65}$$

Uit de kansdichtheidsfunctie van $\vec{Y}$ kan de marginale kansdichtheidsfunctie van Y_1 worden bepaald door integratie:

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(Y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{Y}}(\vec{Y})\,dY_n \ldots dY_3 dY_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{X}}\Big(X_1, X_2, \ldots h(Y_1, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})\Big)\,|J|\,dX_{n-1}\ldots dX_2 dX_1 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Het is ook mogelijk om de kansdichtheidsfunctie van Y_1 te bepalen door eerst de kansverdelingsfunctie te berekenen en die vervolgens te differentiëren. Het berekenen van de kansverdelingsfunctie kan met behulp van het totale waarschijnlijkheidstheorema. De formulering van de kansverdelingsfunctie is:

$$\begin{aligned} F_{Y_1}(Y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} P(Y_1 < Y_1|\vec{X}) f_{\vec{X}}(X_1, X_2, \ldots, X_n) dX_1 dX_2 \ldots dX_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} 1\Big(g(\vec{X}) - Y_1\Big) f_{\vec{X}}(X_1, X_2, \ldots, X_n) dX_1 dX_2 \ldots dX_n \end{aligned} \tag{2.67}$$

Cur frame Page 34 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

waarin:

$$\begin{cases} 1\left(g(\vec{X}) - Y_1\right) = 1 & \text{als} \quad g(\vec{X}) - Y_1 < 0; \\ 1\left(g(\vec{X}) - Y_1\right) = 0 & \text{als} \quad g(\vec{X}) - Y_1 > 0. \end{cases}$$

De kansdichtheid wordt nu gevonden door te differentiëren. Deze methode voor het bepalen van de kansdichtheidsfunctie en de kansverdelingsfunctie van Y_1 is met name geschikt voor de toepassing van numerieke methoden.
Met behulp van de marginale kansdichtheidsfunctie kunnen de verwachtingswaarde en de variantie van Y_1 worden berekend. In het geval van een lineaire functie is het mogelijk om deze waarden te berekenen zonder de kansdichtheid te bepalen. De functie Y_1 is in dit geval:

$$Y_1 = g(\vec{X}) = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n + b \tag{2.68}$$

De verwachtingswaarde van Y_1 is dan:

$$\begin{aligned} E(Y_1) &= E(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n + b) \\ &= a_1E(X_1) + \ldots + a_nE(X_n) + b \\ &= a_1\mu_{X_1} + \ldots + a_n\mu_{X_n} + b \\ &= g(\mu_{\vec{X}}) \end{aligned} \tag{2.69}$$

en de variantie van Y_1 is:

$$\begin{aligned} Var(Y_1) &= E((Y_1 - \mu_{Y_1})^2) \\ &= E\left(((a_1X_1 + \ldots + a_nX_n + b) - (a_1\mu_{X_1} + \ldots + a_n\mu_{X_n} + b))^2\right) \\ &= E\left((a_1(X_1 - \mu_{X_1}) + \ldots + a_n(X_n - \mu_{X_n}))^2\right) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ia_j(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ia_jCov(X_i, X_j) \end{aligned} \tag{2.70}$$

Als de functie niet lineair is, kan deze rond een willekeurig punt $\vec{X}_0$ worden benaderd door de eerste twee termen van de Taylor-polynoom:

$$Y_1 = g(\vec{X}) \approx g(\vec{X}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(\vec{X}_0)}{\partial X_i}(X_i - X_{0_i}) \tag{2.71}$$

Cur frame Page 35 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De verwachtingswaarde van Y_1 is dan te benaderen met:

$$E(Y_1) = E\left(g(\vec{X})\right) \approx g(\vec{X}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(\vec{X}_0)}{\partial X_i}(\mu_{X_i} - X_{0_i}) \tag{2.72}$$

en de variantie door:

$$Var(Y_1) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g(\vec{X}_0)}{\partial X_i} \frac{\partial g(\vec{X}_0)}{\partial X_j} Cov(X_i, X_j) \tag{2.73}$$

Als voor $\vec{X}_0$ de verwachtingswaarde van $\vec{X}$ wordt gekozen, dan is sprake van de zogenoemde Mean Value benadering.
Het beste kan het voorgaande duidelijk worden gemaakt met een voorbeeld.

VOORBEELD 2.1

Gevraagd wordt om de kansdichtheidsfunctie te bepalen van de functie $Y_1 = X_1 + X_2$, waarin X_1 en X_2 onafhankelijke uniform verdeelde stochastische variabelen op het interval (0, 1) zijn.
Als hulpvariabele wordt Y_2 gedefinieerd als $Y_2 = X_1$.
Omgekeerd zijn X_1 en X_2 te schrijven als functie van Y_1 en Y_2, te weten:

$$X_1 = Y_2$$
$$X_2 = Y_1 - Y_2 = Y_1 - X_1$$

De Jacobiaan is:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \text{ dus } |J| = 1$$

De kansdichtheidsfunctie van Y_1 wordt gevonden door integratie:

$$f_{Y_1}(Y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{X}}(X_1, Y_1 - X_1)|J|dX_1$$

Omdat gegeven is dat X_1 en X_2 onafhankelijk zijn, geldt:

$$f_{\vec{X}}(X_1, Y_1 - X_1) = f_{X_1}(X_1)f_{X_2}(Y_1 - X_1)$$

Hieruit volgt:

$$f_{Y_1}(Y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(X_1)f_{X_2}(Y_1 - X_1)dX_1$$

In enkele gevallen is deze integraal analytisch oplosbaar. De oplosbaarheid is afhankelijk van de marginale kansdichtheidsfuncties van X_1 en X_2.

Cur frame Page 36 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

In dit voorbeeld is aangenomen dat zowel X_1 als X_2 uniform verdeeld is op het interval (0, 1), dus:

als $0 \le X_1 \le 1$ dan $f_{X_1}(X_1) = 1$ en anders $f_{X_1}(X_1) = 0$
als $0 \le Y_1 - X_1 \le 1$ dan $f_{X_2}(Y_1 - X_1) = 1$ en anders $f_{X_2}(Y_1 - X_1) = 0$

Bij het integreren moeten deze grenzen, waarbinnen de kansdichtheidsfuncties zijn gedefinieerd, in acht worden genomen. Dit leidt tot de volgende oplossing:

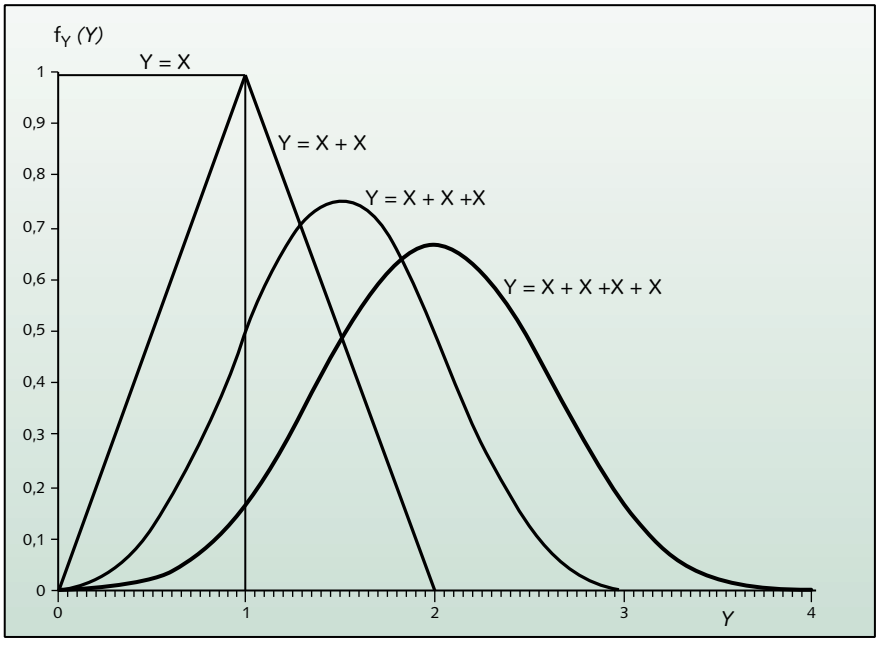
$$\text{als } 0 \le Y_1 \le 1 \text{ geldt: } f_{Y_1}(Y_1) = \int_0^{Y_1} 1 \cdot 1 \, dX_1 = Y_1$$

$$\text{als } 1 \le Y_1 \le 2 \text{ geldt: } f_{Y_1}(Y_1) = \int_{Y_1 - 1}^{Y_1} 1 \cdot 1 \, dX_1 = 2 - Y_1$$

$$\text{en anders geldt: } f_{Y_1}(Y_1) = 0$$

2.4.4 CENTRALE LIMIETSTELLING

Een belangrijke eigenschap van stochastische variabelen wordt gegeven door de centrale limietstelling: „Wanneer een groot aantal onafhankelijke stochastische variabelen, waarvan geen enkele domineert, wordt opgeteld, resulteert dit in een stochastische variabele die normaal verdeeld is, ongeacht de uitgangsverdelingen van de opgetelde variabelen".
In figuur 2.8 wordt dit gedemonstreerd voor de som van respectievelijk 2, 3 en 4 stochastische onafhankelijke variabelen die uniform verdeeld zijn tussen 0 en 1. Een gevolg van de centrale limietstelling is dat de som van twee normaal verdeelde variabelen ook weer normaal verdeeld is.



Figuur 2.8 *Centrale limietstelling.*

Cur frame Page 37 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Analoog aan de centrale limietstelling voor de som van een groot aantal onafhankelijke stochastische variabelen geldt dat het product van een groot aantal onafhankelijke stochastische variabelen lognormaal verdeeld is.

2.5 EXTREME WAARDE VERDELINGEN

In de voorgaande paragrafen zijn functies van stochastische variabelen behandeld. Twee bijzondere functies van stochastische variabelen zijn nog niet aan de orde geweest. Deze functies zijn de zogenoemde extreme waarde functies. De extreme waarde functies geven de maximale of de minimale waarde van een aantal variabelen en deze worden geschreven als:

$$\begin{aligned} \mathrm{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n) &= \text{kleinste waarde van } X_1, X_2, \ldots, X_n \\ \mathrm{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n) &= \text{grootste waarde van } X_1, X_2, \ldots, X_n \end{aligned} \tag{2.74}$$

Als de variabelen X_1 tot en met X_n stochastisch zijn, dan zijn ook de extreme waarden stochastische variabelen. De kansverdelingen van de variabelen X_1 tot en met X_n worden de moeder verdelingen genoemd. Die van de grootste en de kleinste waarde staan bekend als de extreme waarde verdelingen.
In deze paragraaf wordt aandacht besteed aan de extreme waarde verdeling van een aantal identiek verdeelde stochastische variabelen. Dit komt overeen met de kansverdeling van de grootste of kleinste waarde die de variabele kan aannemen bij een aantal trekkingen.
Een constructeur wil bijvoorbeeld weten wat de maximale windbelasting is op een constructie gedurende de ontwerpperiode en niet per storm. Ook zal hij, bij een constructie die bestaat uit een aantal elementen, waarbij het zwakste element de sterkte van de constructie bepaald, willen weten wat de minimale sterkte van de elementen is.
Met behulp van de rekenregels voor de kansrekening is het mogelijk om uit de moeder verdelingen de extreme waarde verdelingen te bepalen.
Stel dat van een stochastische variabele X de moeder kansverdeling bekend is. De vraag is nu wat de kansverdeling van de maximale en de minimale waarde van X is bij n trekkingen, als gegeven is dat de trekkingen elkaar niet beïnvloeden. In feite gaat het hier om n onafhankelijke stochastische variabelen met dezelfde kansverdeling.
De kans dat alle trekkingen waarden voor X opleveren die kleiner dan of gelijk zijn aan X, wordt gegeven door:

$$P(X_1 \le X \cap X_2 \le X \cap \ldots \cap X_n \le X) = P(X_1 \le X)P(X_2 \le X)\ldots P(X_n \le X) \tag{2.75}$$

Omdat $P(X_1 \le X) = P(X_2 \le X) = \ldots = P(X_n \le X) = F_X(X)$, geldt:

$$P(X_1 \le X \cap X_2 \le X \cap \ldots \cap X_n \le X) = \left(F_X(X)\right)^n \tag{2.76}$$

Hiermee is de kans bepaald dat n waarden van X uit n trekkingen kleiner dan of gelijk zijn aan *X*. De kansverdeling voor maxima wordt doorgaans geschreven als:

$$F_{X_n^n}(X) = \left(F_X(X)\right)^n \tag{2.77}$$

Cur frame Page 38 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De kans dat alle trekkingen waarden opleveren die groter zijn dan *X*, wordt analoog aan het voorgaande bepaald door:

$$P(X_1 > X \cap X_2 > X \cap \ldots \cap X_n > X) = \left(1 - F_X(X)\right)^n \tag{2.78}$$

De kans dat ten minste één van de trekkingen een waarde oplevert die kleiner dan of gelijk is aan *X*, is complementair aan het voorgaande. De kansverdeling van de minimale waarde van X bij n steekproeven is derhalve:

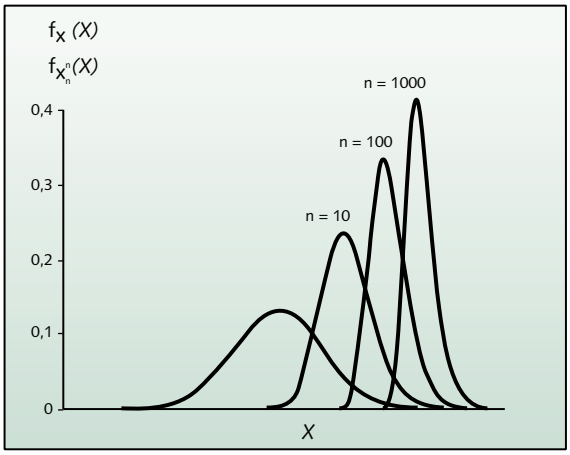
$$F_{X_1^n}(X) = 1 - \left(1 - F_X(X)\right)^n \tag{2.79}$$

Uit de kansverdelingen van de extreme waarden voor maxima en minima kunnen de kansdichtheidsfuncties worden bepaald door te differentiëren naar *X*.
Het resultaat is:

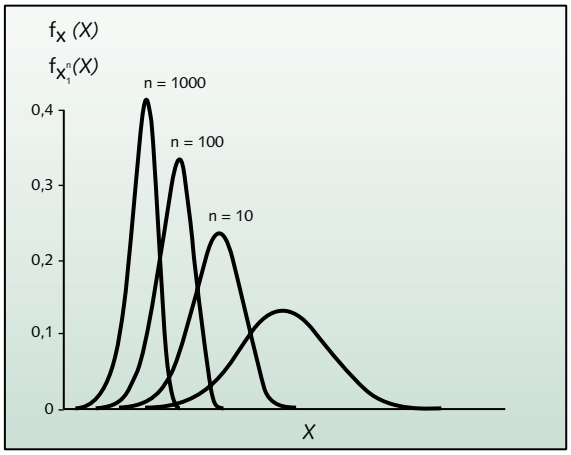
$$f_{X_n^n}(X) = \frac{dF_{X_n^n}(X)}{dX} = nf_X(X)\left(F_X(X)\right)^{n-1} \tag{2.80}$$

$$f_{X_1^n}(X) = \frac{dF_{X_1^n}(X)}{dX} = nf_X(X)\left(1 - F_X(X)\right)^{n-1} \tag{2.81}$$

In de figuren 2.9 en 2.10 zijn de kansdichtheidsfuncties gegeven van respectievelijk de maxima en de minima van X bij een aantal waarden van n. De moeder kansdichtheidsfunctie van X is eveneens in de beide figuren aangegeven. De extreme waarde verdeling behoeft niet van hetzelfde type te zijn als de moeder verdeling.



Figuur 2.9 Kansdichtheidsfuncties van de maxima van X.



Figuur 2.10 Kansdichtheidsfuncties van de minima van X.

Voor grote waarden van n naderen de extreme waarde verdelingen van de stochastische variabele naar een beperkt aantal mogelijke typen verdelingen. Deze verdelingen staan bekend als de asymptotische extreme

Cur frame Page 39 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

waarde verdelingen (zie bijlage B6) en zijn onderverdeeld in drie hoofdtypen. Voor de theoretische onderbouwing wordt verwezen naar [2.1]. Opgemerkt wordt dat de convergentie naar de asymptotische extreme waarde verdelingen voor toenemende n zeer langzaam is.
Voor het middengebied van de moeder verdeling is er meestal wel sprake van convergentie, maar voor de staart van de verdeling is er dikwijls nauwelijks sprake van convergentie. Er moet derhalve behoedzaam worden omgegaan met aannamen met betrekking tot het type van de extreme waarde verdeling.

2.6 SCHATTEN VAN VERDELINGEN

2.6.1 INLEIDING

Een belangrijk onderdeel in de risico-analyse is het vaststellen van de verdelingen van de stochastische variabelen. De keuze van het verdelingstype en de verdelingsparameters bepalen voor een groot deel de uitkomst van de analyse.
Als een groot aantal statistische gegevens bekend is, kan gebruik worden gemaakt van frequentistische methoden uit de klassieke statistiek. In veel gevallen is de hoeveelheid statistische gegevens ontoereikend en moet de toevlucht worden genomen tot meer subjectieve methoden voor het schatten van verdelingstypen en parameters.
Alvorens een schatting wordt gemaakt van de verdeling van een stochastische variabele, moet een aantal overwegingen in beschouwing worden genomen.
Op de eerste plaats hebben verdelingen vaak een theoretische achtergrond, die deze wel of niet geschikt maken een bepaald fenomeen te beschrijven. De bekendste hiervan zijn:

- de centrale limietstelling volgens welke de som van een groot aantal stochastische variabelen normaal verdeeld is en het product van de variabelen lognormaal verdeeld is;
- het maximum/minimum van een groot aantal onafhankelijke stochasten is vaak verdeeld volgens één van de asymptotische extreme waarde verdelingen.

In sommige gevallen zijn de gezochte stochastische variabelen functies van andere bekende stochastische variabelen, waarvan de verdelingstypen bekend zijn. Er kan dan langs theoretische weg een verdeling worden afgeleid. Een voorbeeld hiervan is de Rayleigh-verdeling voor de hoogte van zeegolven.
In andere gevallen zijn er overwegingen die bepaalde verdelingen uitsluiten. Bijvoorbeeld als een variabele alleen positieve waarden kan aannemen, komt in beginsel een normale verdeling niet in aanmerking. Met dit argument moet men overigens niet te streng zijn en het alleen toepassen als de variatiecoëfficiënt groot is: als bijvoorbeeld de kans op een negatieve waarde in de orde van grootte van 10^{-8} ligt, is er voor de meeste toepassingen geen reden om de normale verdeling te verwerpen.
Over het algemeen zullen deze overwegingen echter niet voldoende zijn of minstens verificatie behoeven. Dit kan op twee wijzen, namelijk klassiek en Bayesiaans. Beide procedures zullen worden beschreven. Naast het volgen van de formele procedure is het natuurlijk ook altijd goed de gevonden verdeling en het waarnemingsmateriaal in een figuur te tekenen. Bij voorkeur worden zowel de verdelings- als de dichtheidsfunctie getekend. Op het oog zijn dan reeds bepaalde conclusies mogelijk, waarbij overwegingen kunnen meespelen die moeilijk formaliseerbaar zijn. Soms gaat het bijvoorbeeld vooral om de rechter- of de linkerstaart en soms alleen om het middengebied.

Cur frame Page 40 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

In 2.6.2 tot en met 2.6.4 komen enkele methoden voor het schatten van parameters van een bekend verdelingstype aan de orde en in 2.6.5 worden methoden genoemd voor het kiezen of verwerpen van een verdelingstype.
De geschatte parameters worden doorgaans schatters genoemd en worden aangeduid met een ^. Zo is $\hat{p}$ een schatter voor p. De schatters van het gemiddelde en de standaardafwijking worden meestal aangeduid met m respectievelijk s.

2.6.2 SUBJECTIEVE PARAMETERSCHATTING

Dikwijls ontbreken statistische gegevens met betrekking tot stochastische variabelen. In dergelijke gevallen wordt afgegaan op de ervaring en intuïtie van experts, ondersteund door gegevens uit de literatuur. De op deze wijze verkregen schatting van de eigenschappen van stochastische variabelen is subjectief en dikwijls aan discussie onderhevig. Maar zelfs als zeer veel statistisch materiaal voorhanden is, zal bij het schatten van de kansverdeling van een variabele meer kennis noodzakelijk zijn dan alleen deze statistische gegevens. Enige subjectiviteit is derhalve niet uit te sluiten.
In het algemeen wordt getracht een onder- en een bovengrens, waarbinnen de waarde van een variabele hoogst waarschijnlijk zal liggen, en een meest waarschijnlijke waarde te definiëren. Onder hoogst waarschijnlijk wordt in dergelijke gevallen meestal verstaan „met een kans van 95 %". Dit levert twee punten van de kansverdeling, te weten:

$$\begin{aligned} F(\text{bovengrens}) &= 97,5\% \\ F(\text{ondergrens}) &= 2,5\% \end{aligned} \tag{2.82}$$

Uiteraard kunnen ook andere grenzen worden gekozen. Als het verdelingstype van de variabele bekend is, kunnen met behulp van de gekozen waarden de parameters van de kansverdeling worden geschat.
De keuze van het verdelingstype zal in veel gevallen ook zijn gebaseerd op ervaring, intuïtie en literatuur. Het is aan te bevelen om de keuze van het verdelingstype te maken op grond van een analyse van de fysische factoren, die de waarde van de stochastische variabele beïnvloeden.

2.6.3 FREQUENTISTISCHE PARAMETERSCHATTING

Als het verdelingstype van een stochastische variabele bekend is en er waarnemingen van de variabele beschikbaar zijn, kunnen de parameters van de verdeling worden geschat met behulp van frequentistische methoden.

De schatter van een parameter is een functie van de waarnemingen en kan worden geschreven als:

$$\hat{p} = g(\vec{X}) = g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{2.83}$$

waarin:

$\vec{X}$ is een vector met de steekproefresultaten (waarnemingen) van X.

Omdat X een stochastische variabele is, kunnen de waarnemingen op voorhand ook worden beschouwd als stochastische variabelen. De schatter $\hat{p}$ is derhalve een functie van n stochastische variabelen.

Cur frame Page 41 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Op grond van de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $\hat{p}$ kunnen enkele eigenschappen worden gedefinieerd.
De schatter $\hat{p}$ van een parameter p wordt een zuivere schatter genoemd als de verwachtingswaarde van $g(\vec{X})$ gelijk is aan p, dus als $E\left(g(\vec{X})\right) = E(\hat{p}) = p$.

VOORBEELD 2.2

Uit een steekproef van n waarnemingen wordt het gemiddelde m_x bepaald als schatter voor het gemiddelde van de verdeling van X, dus:

$$m_X = \frac{(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)}{n}$$

De verwachtingswaarde van m_x is:

$$E(m_X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)}{n} f_X(X)dX$$

$$= \frac{1}{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty} X_1 f_X(X)dX + \int_{-\infty}^{\infty} X_2 f_X(X)dX + \ldots + \int_{-\infty}^{\infty} X_n f_X(X)dX\right)$$

$$= \frac{1}{n}(\mu_{X_1} + \mu_{X_2} + \ldots + \mu_{X_n}) = \mu_X$$

Hieruit volgt dus dat m_x een zuivere schatting is voor μ_x.

Indien alleen voor grote waarden van n geldt dat $E(\hat{p}) = p$, dan is $\hat{p}$ een asymptotisch zuivere schatter.
Soms kan voor één parameter van een kansverdeling een aantal zuivere schatters worden gedefinieerd. Het gemiddelde van een normale verdeling kan bijvoorbeeld worden geschat met:

> het steekproefgemiddelde;
> de mediaan van de waarnemingen;
> het gemiddelde van de hoogste en de laagste waarneming.

Het verschil tussen de schatters zit in de standaardafwijking van m_X. Het steekproefgemiddelde heeft de kleinste standaardafwijking en is daarom de meest efficiënte schatter.
In het geval dat een schatter onzuiver is, is niet de standaardafwijking van belang maar wel de verwachtingswaarde van de kwadratische fout $E\left((\hat{p} - p)^2\right)$.

In dit geval is het illustratief om even stil te staan bij twee veel gebruikte schatters voor de standaardafwijking, te weten:

$$s_X = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \mu_X)^2}{n}} \qquad (2.84)$$

$$s_X = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \mu_X)^2}{n - 1}} \qquad (2.85)$$

Cur frame Page 42 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Als het gemiddelde onbekend is, is de eerstgenoemde schatter onzuiver en de laatstgenoemde zuiver. De onzuivere schatter heeft overigens wel de kleinste verwachtingswaarde van de kwadratische fout (mean square error).
Enkele methoden van frequentistische parameterschatting zijn:

> de methode der momenten;
> de methode van de maximum likelihood;
> de kleinste kwadraten methode.

In bijlage C worden deze methoden nader toegelicht.

2.6.4 BAYESIAANSE PARAMETERSCHATTING

De Bayesiaanse parameterschatting is een mix van de subjectieve en de frequentistische parameterschatting. In eerste instantie moeten de zogenoemde a priori kansen worden vastgesteld voor het juist zijn van een aantal hypothesen met betrekking tot de te schatten parameters, die de kennis weergeven op het moment dat er nog geen statistische gegevens beschikbaar zijn. Deze kansen zijn subjectief en vormen daarmee de discutabele kant van de Bayesiaanse analyse.
De a priori parameters van de kansverdeling worden door middel van een standaardprocedure gecombineerd met de objectieve statistische gegevens om te komen tot de zogenoemde a posteriori parameters. Deze procedure staat beschreven in bijlage C.
De a posteriori kansen geven de waarschijnlijkheid van de gestelde hypothesen met betrekking tot de te schatten parameters.

2.6.5 VERDELINGSKEUZE

In het voorgaande is verondersteld dat het kansverdelingstype van de beschouwde stochastische variabele reeds bekend is. Doorgaans is dit kansverdelingstype echter niet bekend. De keuze van het type is afhankelijk van de kennis met betrekking tot de stochastische variabele. Dikwijls zal een subjectieve schatting van het type moeten worden gemaakt op basis van de intuïtie en kennis van experts en gegevens uit de literatuur. Als statistisch materiaal beschikbaar is, kan een schatting van het verdelingstype worden gemaakt met behulp van frequentistische methoden. Bij één van deze methoden wordt gebruik gemaakt van de schatters van de genormeerde scheefheid en de genormeerde gepiektheid.

De centrale momenten van de verdeling van een stochastische variabele kunnen worden geschat door bepaling van de momenten van het statistische materiaal:

$$\hat{m}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - \frac{\sum X_i}{n}\right)^k}{n} \qquad (2.86)$$

waarin:

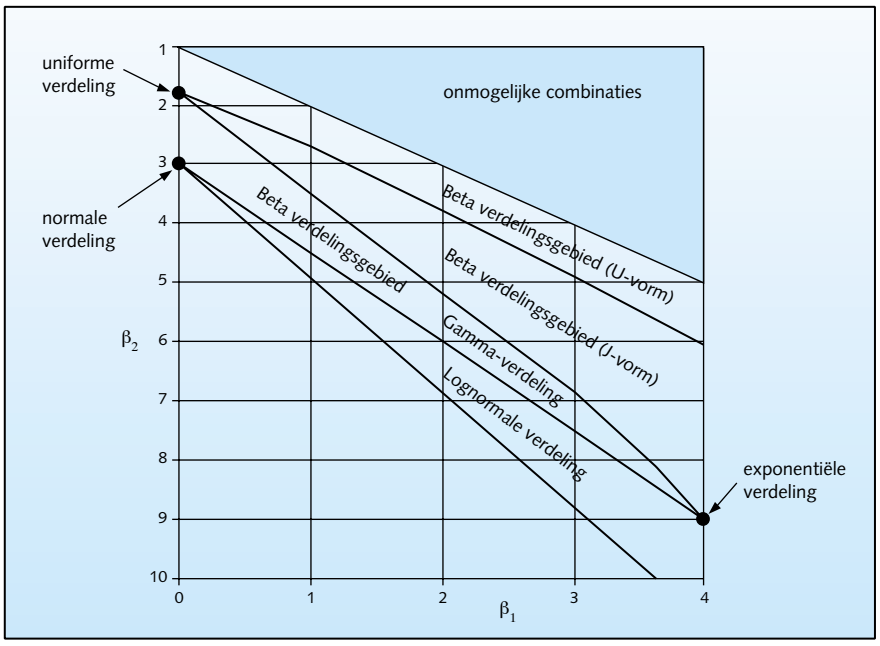
$\hat{m}_k$ is de schatter van het k^{de} centrale moment;
X_i is de waarneming i van X;
n is het aantal waarnemingen van X.

Cur frame Page 43 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Met behulp van de schatters voor de centrale momenten is het mogelijk om de zogenoemde genormeerde scheefheid en genormeerde gepiektheid van de verdeling te schatten door:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(\hat{m}_3)^2}{(\hat{m}_2)^3} \qquad \text{respectievelijk} \qquad \hat{\beta}_2 = \frac{\hat{m}_4}{(\hat{m}_2)^2} \tag{2.87}$$

Voor diverse bekende verdelingstypen zijn de relaties tussen de genormeerde scheefheid (β_1) en de genormeerde gepiektheid (β_2) onderzocht door Pearson. Enige van deze relaties zijn gegeven in figuur 2.11. Op grond van de schatters $\hat{\beta}_1$ en $\hat{\beta}_2$ van β_1 en β_2 kan met behulp van deze figuur een keuze worden gedaan voor het verdelingstype.



Figuur 2.11 *Relaties tussen β_1 en β_2 van verschillende verdelingstypen (naar professor E.S. Pearson, University College, Londen).*

In de praktijk blijkt dat, zelfs als zeer veel waarnemingen beschikbaar zijn, het nagenoeg onmogelijk is om de exacte verdeling te vinden. Met behulp van figuur 2.11 wordt doorgaans een aantal mogelijke verdelingen geselecteerd. Uit deze gekozen verdelingen kan met behulp van een aantal tests een nadere selectie worden gemaakt. In bijlage C zijn twee tests, te weten de chi-kwadraat-test en de Kolmogorov-Smirnov-test, beschreven.
De hiervoor genoemde tests zijn puur gebaseerd op het statistische materiaal en deze houden geen rekening met andere kennis die relevant is voor de keuze van het verdelingstype. Een methode waarmee deze kennis wel in rekening kan worden gebracht, is de Bayesiaanse procedure voor de keuze van het verdelingstype. Deze procedure is eveneens beschreven in bijlage C.

Cur frame Page 44 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

LITERATUUR

Aanbevolen literatuur:

2.1. GUMBEL, E.J., Statistics of extremes. Columbia University Press, 1958.

Geraadpleegde literatuur:

2.2. BENJAMIN, J.R. en C.A. CORNELL, Probability, statistics and decision for civil engineers. McGraw-Hill, 1970.

2.3. BOLTIN, V.V., Statistical methods in structural dynamics. Holden-Day, San Francisco, 1989.

2.4. GROENEBOOM, P. et al, Statistiek en operationele analyse. Technische Universiteit Delft, Delft, 1993.

Cur frame Page 45 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Cur frame Page 46 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Gekantelde duwbakken in de Zuidersluis te IJmuiden ten gevolge van een botsing (6-7-'94).

Cur frame Page 47 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Hoofdstuk 3: Onderdelen van een risico-analyse

3.1 INLEIDING

Alvorens in te gaan op de analyse van risico's, is het noodzakelijk om het begrip risico nader te beschouwen. In maatschappelijke discussies wordt aan het begrip risico geen eenduidige betekenis toegekend. Volgens de Dikke van Dale is risico:

Gevaar voor schade of verlies, de gevaarlijke of kwade kans of kansen die zich bij iets voordoen.

In de definitie worden een kans en een gevolg (schade of verlies) genoemd. Het accent ligt echter op de kans. Het kwantificeren en vergelijken van risico's op basis van alleen de kans is echter niet reëel, immers bij de kans van 50 % op het verlies van 100 gulden is het risico anders dan bij de kans van 50 % op het verlies van 1000 gulden.
Ook in kringen van risico-analisten bestaat over de definitie van risico geen eensluidendheid.
Er zijn meer definities van het begrip risico gangbaar, die een kwantitatieve analyse mogelijk maken; vier van deze definities zijn:

1. risico is de kans op een ongewenste gebeurtenis bij een proces of object;
2. risico is het gevolg van een ongewenste gebeurtenis;
3. risico is kans x gevolg;
4. risico is de functie van de kans en het gevolg.

De eerste twee definities zijn voor het algemene geval niet goed bruikbaar. De risico's die betrekking hebben op kleine kansen met zeer grote gevolgen of grote kansen met kleine gevolgen, zullen bij gebruik van de eerste respectievelijk de tweede definitie niet goed tot uitdrukking komen.
De derde definitie geeft een betere basis voor vergelijking van risico's. In feite wordt een verwachtingswaarde van het gevolg van een proces bepaald. In sommige gevallen komt dit overeen met het verlies dat deterministisch op de lange termijn optreedt. De kans op een ongewenste gebeurtenis en het gevolg van deze gebeurtenis spelen een even belangrijke rol in deze definitie.
Omdat de kans dimensieloos is, is de dimensie van het risico volgens deze definitie gelijk aan die van het gevolg. De definitie lijkt eenvoudig, maar de gevolgen van een ongewenste gebeurtenis zijn vaak meer-dimensionaal (materiële schade, gewonden, doden, menselijk leed enz.) en daardoor zal het risico niet zonder meer uit te drukken zijn in één getal.
De laatste definitie van het risico is de meest algemene van de vier genoemde. In feite zijn de eerste drie definities bijzondere vormen van de vierde. Met deze definitie is het mogelijk om aan het gevolg van een ongewenste gebeurtenis een gewicht toe te kennen, dat afhankelijk is van de ernst van het gevolg. Dit is vooral van belang bij kleine kansen en grote gevolgen, waarbij een definitie van een deterministisch verlies over een lange termijn niet opgaat. Ook kunnen hiermee zaken zoals risico-aversie in rekening worden gebracht bij de beoordeling van het risico.
Het gevolg van een ongewenste gebeurtenis kan zowel deterministisch als stochastisch zijn. Als sprake is van een stochastisch gevolg, kan voor het risico een kansdichtheidsfunctie worden gedefinieerd, waarvan de verwachtingswaarde is te bepalen.

Cur frame Page 48 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

VOORBEELD 3.1

Een ondergrondse tank wordt gebruikt voor opslag van giftige stoffen. Het milieutechnisch falen van het opslagsysteem houdt in dat er een lekkage optreedt. Deze lekkage heeft een verspreiding van giftige stoffen in de bodem ten gevolg. Afhankelijk van de mate van lekkage is de milieuschade te bepalen. Hierbij spelen een aantal zaken een rol, zoals de grondopbouw, de grondwaterstanden en stroming, de doorlatendheid van de grond enzovoorts.
De hoeveelheid gelekte giftige stof (X) is het gevolg van de ongewenste gebeurtenis „lekkage van de tank" en de milieuschade is een functie g(X) van de hoeveelheid gelekte giftige stof.
Stel dat de hoeveelheid gelekte giftige stof, gegeven de ongewenste gebeurtenis, normaal verdeeld is met een gemiddelde waarde μ en een standaardafwijking σ. De kans op de ongewenste gebeurtenis bedraagt P_f. De kansdichtheid van de milieuschade is:

$$f_{g(X)}g(X) = \begin{cases} \infty & voor\ X = 0 \\ P_f\varphi\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right) & voor\ X \neq 0 \end{cases}$$

Als het risico is geformuleerd als de verwachtingswaarde $E\left(P_f g(X)\right)$ dan geldt:

$$\text{risico} = P_f \int_{-\infty}^{\infty} g(X)\varphi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) dX$$

Voor het berekenen van de integraal wordt verwezen naar 2.4.

Een risico-analyse kan voor velerlei doelen worden gebruikt. Bijvoorbeeld voor het toetsen van de veiligheid aan een norm of het economisch optimaliseren van processen en objecten. Een algemeen doel van de risico-analyse is het leveren van een basis voor het rationeel nemen van beslissingen.
Voorbeelden hiervan zijn het ontwerpen van de waterkeringen, het optimaliseren van onderhoud, het analyseren van passingsproblemen enzovoorts.
Afhankelijk van de doelstellingen moeten normen worden gesteld, waaraan de resultaten van de analyse moeten voldoen. Wanneer het gaat om veiligheidsvraagstukken, speelt het nationale veiligheidsbeleid een belangrijke rol. Dit beleid is vastgelegd in door de overheid gestelde normen.
Processen en specificaties van objecten moeten indien nodig worden bijgesteld, zodat aan dergelijke normen wordt voldaan.
Bij een economische optimalisatie spelen kosten van het proces of object in samenhang met het risico een belangrijke rol. Het risico moet dan echter wel uit te drukken zijn in een monetaire eenheid. Doorgaans gaat het bij een dergelijke analyse om het minimaliseren van de som van de kosten van realisatie en in stand houden van het proces of object en het risico. De grenswaarde voor het risico ligt in een dergelijke analyse niet op voorhand vast.

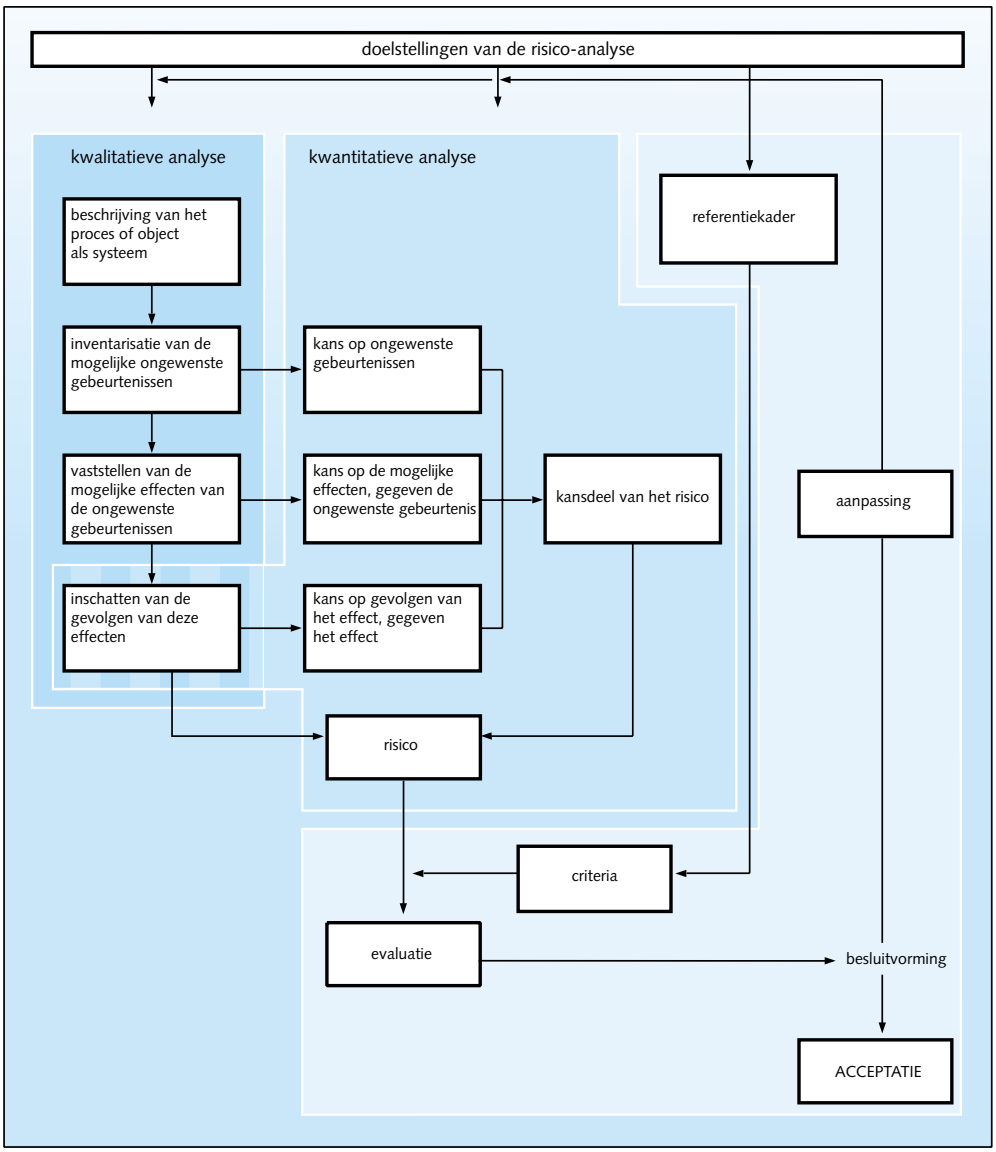
3.2 STAPPEN IN EEN RISICO-ANALYSE

In de inleiding van dit hoofdstuk is duidelijk gemaakt dat risico een functie is van kansen en gevolgen.
De risico-analyse bestaat derhalve uit een analyse van kansen en gevolgen. Daarnaast kan afhankelijk van de

Cur frame Page 49 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

doelstellingen van de analyse ook het vaststellen van normen en criteria, waaraan het risico moet voldoen, onderdeel uitmaken van de analyse.
In figuur 3.1 zijn elementen van een risico-analyse schematisch weergegeven. Bij de risico-analyse kan onderscheid worden gemaakt in:

1. een kwalitatieve analyse, bestaande uit de analyse van de functies en onderdelen van het systeem, de inventarisatie van bedreigingen, faalmechanismen, gevolgen en het vastleggen van de onderlinge samenhang;
2. een kwantitatieve analyse, bestaande uit de berekening van de faalkans, kwantificering van gevolgen, berekening van risico's en beoordeling van het resultaat door toetsing aan normen;
3. besluitvorming en toetsing van het risico.



Figuur 3.1 *Onderdelen in een risico-analyse.*

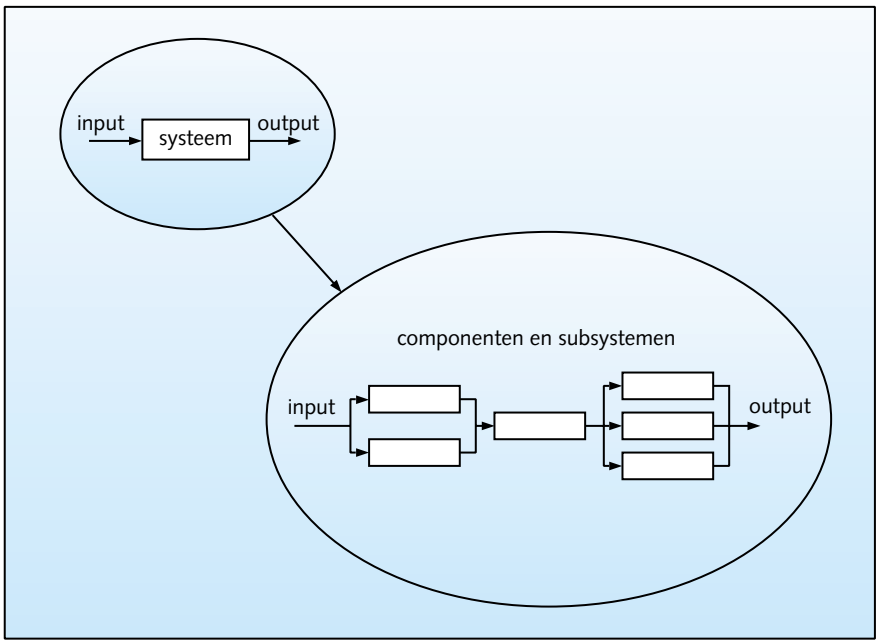
Cur frame Page 50 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De kwantitatieve analyse is niet altijd mogelijk of wenselijk. In een dergelijk geval kan alleen een kwalitatieve risico-analyse worden uitgevoerd om te komen tot een globale beoordeling van de risico's en verbetering van processen of objecten.
De in figuur 3.1 genoemde elementen kunnen worden gebruikt als stappen in de analyse. De pijlen geven de logische volgorde aan. De getoonde werkwijze is een handreiking voor een mogelijke uitvoering van een risico-analyse en moet niet als dwingend worden gezien.
Soms worden er stukken aan de analyse toegevoegd, omdat die relevant zijn waar het gaat om de besluitvorming. Soms worden er stukken weggelaten, omdat deze technisch (nog) niet kunnen of te veel kosten met zich meebrengen, maar de relevantie niet aantasten.

3.3 KORTE TOELICHTING OP HET STAPPENPLAN

3.3.1 BESCHRIJVING VAN HET PROCES OF OBJECT ALS EEN SYSTEEM

In de risico-analyse wordt gebruik gemaakt van de grondslagen van de systeemleer. Het beschouwde proces of object kan meestal worden beschreven als een zogenoemd input-output element (zie fig. 3.2). Hierbij wordt verondersteld dat het systeem faalt als er geen output plaatsheeft. Doorgaans wordt een systeem opgedeeld in componenten en subsystemen die elk als een input-output element worden geschematiseerd. Tezamen vormen de componenten en subsystemen door middel van onderlinge relaties een configuratie die representatief is voor het totale systeem.
De onderverdelingen in componenten en subsystemen gaat tot een niveau waarop de faalkansen kunnen worden bepaald.



Figuur 3.2 *Input-output systeem.*

Cur frame Page 51 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

3.3.2 INVENTARISATIE VAN DE MOGELIJKE ONGEWENSTE GEBEURTENISSEN, EFFECTEN EN GEVOLGEN

In deze fase wordt geprobeerd een zo volledig mogelijk inzicht te verkrijgen in alle mogelijke ongewenste gebeurtenissen en de gevolgen daarvan.
Als een systeem of een onderdeel daarvan één of meer gewenste functies niet meer vervult, wordt gesproken van falen. De toestand falen kan langs verschillende wegen worden bereikt. Zo'n weg, die leidt tot falen, wordt een faalmechanisme genoemd. De toestand, waarbij nog juist geen falen optreedt, heet een grens-toestand.
In de praktijk worden twee soorten grenstoestanden onderscheiden, één waarbij overschrijding ervan leidt tot tijdelijk en/of gedeeltelijk falen en één waarbij langdurig en/of volledig falen optreedt. In de literatuur zijn deze gevallen bekend als:

> De Serviceability Limit State (S.L.S.); dit zijn grenstoestanden, waarbij nog juist de functies kunnen worden vervuld, zogenoemde bruikbaarheidsgrenzen. Een voorbeeld hiervan is de niet-werkbaarheid in een haven ten gevolge van tijdelijk te hoge golven.
> De Ultimate Limit State (U.L.S.) is de uiterste grenstoestand. Door falen en bezwijken zal een object blijvend niet meer kunnen functioneren. Dit zal bijvoorbeeld optreden als door extreme omstandigheden de golfbrekers van een haveningang zijn weggeslagen, waardoor onder normale omstandigheden de golfhoogten in de haven te groot zijn voor de werkbaarheid.

Het is van groot belang dat een zo volledig mogelijk overzicht aanwezig is van al deze mechanismen, alvorens tot een kwantitatieve analyse wordt overgegaan. Er ontstaan in de praktijk namelijk meer ongelukken door het niet onderkennen van mechanismen dan door een onjuiste analyse van een mechanisme.
Het vinden van een zo volledig mogelijke lijst van bedreigingen en faalmechanismen is geen eenvoudige opgave. De hulpmiddelen hierbij zijn: databanken, literatuurstudies, interviews, ervaringen met vergelijkbare systemen, brainstorm-sessies enzovoorts. Uiteraard geldt dat voor veel voorkomende systemen de meeste faaloorzaken wel bekend zijn en kunnen worden gevonden in leidraden en handboeken.

3.3.3 KANSDEEL VAN HET RISICO

Het kansdeel van het risico bestaat uit:

> de kans op het optreden van de ongewenste gebeurtenissen;
> de kans dat de ongewenste gebeurtenis leidt tot een mogelijk effect;
> de kans dat dit effect zal leiden tot het beschouwde gevolg.

Als voorbeeld valt te denken aan:

> de kans dat de dijk afschuift;
> de kans dat water de polder instroomt als het water hoog staat;
> de kans op schade en slachtoffers.

De kans op ongewenste gebeurtenissen kan op twee manieren worden benaderd:

1. De eerste methode is de inductieve weg (empirische methode), waarbij de kans op een bepaalde gebeurtenis wordt bepaald door gebruik te maken van statistieken (database). Een voordeel van deze

Cur frame Page 52 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

methode is dat, bij identieke processen en systemen, geen belangrijke bezwijkmechanismen over het hoofd worden gezien. Nadelig is echter dat deze werkwijze over het algemeen niet veel inzicht geeft in de werking van de mechanismen, waardoor minder doelmatig kan worden gewerkt aan het voorkomen van faalmechanismen. Als de kans op ongewenste gebeurtenissen langs inductieve weg wordt bepaald, is het van groot belang dat het systeem en de randvoorwaarden niet veranderen in de tijd.

2. De tweede methode is die langs deductieve weg. Bij deze methode worden alle faalmechanismen in beschouwing genomen. Het voordeel van deze methode is dat inzicht wordt verkregen in de verschillende faalmechanismen, zodat gerichte maatregelen kunnen worden getroffen om de kans op ongewenste gebeurtenissen te verkleinen.

De kans op mogelijke effecten en de kans op gevolgen van mogelijke effecten kunnen op gelijke wijze worden bepaald als de kans op een ongewenste gebeurtenis. Het gaat hier om voorwaardelijke kansen.
Het totale kansdeel van het risico bedraagt:

$$P(E_1)P(E_2|E_1)P(G|E_1 \cap E_2) \tag{3.1}$$

waarin:

E_1 is de ongewenste gebeurtenis (bijvoorbeeld „bezwijken dijk");
E_2 is het effect (bijvoorbeeld „inundatie polder");
G is het gevolg (bijvoorbeeld „aantal doden door verdrinking").

De kans $P(E_1)P(E_2 \mid E_1)$ is doorgaans de faalkans P_f. De kans $P(G \mid E_1 \cap E_2)$ kan alleen worden bepaald als het gevolg deterministisch is of als het gevolg een discontinue stochastische variabele is met een gegeven kansmassafunctie (zie 2.2). Als het gevolg een continue stochastische variabele is, moet de kansverdelingsfunctie in rekening worden gebracht conform voorbeeld 3.1.

3.3.4 VASTSTELLEN EN EVALUEREN VAN HET RISICO

Na het vaststellen van de gevolgen en bijbehorende kansen, kan het risico worden bepaald en kan een evaluatie plaatshebben. Doorgaans gebeurt dit door het toetsen van het risico aan vooraf gestelde normen. Als de risico-analyse wordt gebruikt in het ontwerp van processen en objecten, worden de stappen vaak verschillende malen met aangepaste systeemspecificaties doorgelopen om te komen tot een optimaal ontwerp. Bij een economische optimalisatie worden per iteratieslag de kosten van het proces of object en het risico berekend. Het ontwerp is optimaal als de kosten minimaal zijn.

3.3.5 BESLUITVORMING OP BASIS VAN RISICO-ANALYSE

De risico-analyse is vaak een ondersteuning voor het nemen van beslissingen. Hoewel een risico-analyse in principe na de evaluatie is afgerond, wordt hier tot slot nog de rationele besluitvorming op basis van een risico-analyse genoemd.
Een hulpmiddel bij het nemen van rationele beslissingen is het vastleggen van verschillende varianten, met bijbehorende risico's, kosten en opbrengsten, in een matrix of een beslissingsboom. Hiermee kan de meest optimale keuze uit een aantal alternatieven worden gemaakt. Voor het toepassen van dergelijke technieken wordt verwezen naar hoofdstuk 4.

Cur frame Page 53 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

LITERATUUR

Geraadpleegde literatuur:

3.1. BOUMA, A.L. et al, De betrouwbaarheid van constructies. Civiele en bouwkundige techniek, nr. 8, september 1983.

3.2. Studiegroep pijpleidingen voor gassen en vloeistoffen, Verkenning in zake risico-analyse van hogedrukleidingen, in het bijzonder voor kruisingen met waterstaatswerken. Provinciale Waterstaat Zuid-Holland, 1978.

3.3. VROUWENVELDER, A.C.W.M. en J.K. VRIJLING, Probabilistisch ontwerpen. Collegedictaat, Faculteit der Civiele Techniek, Technische Universiteit Delft, Delft, 1987.

Cur frame Page 54 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

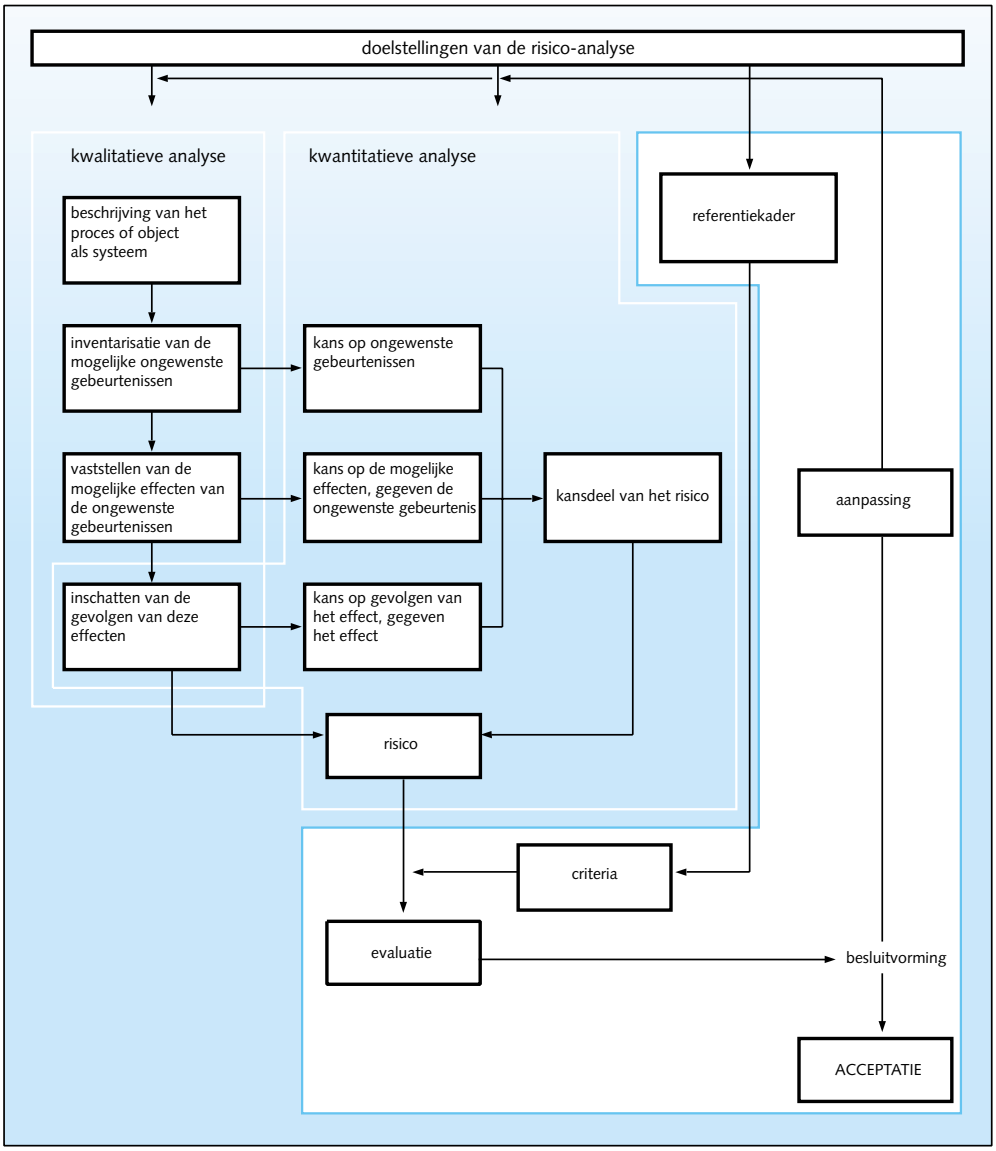
Twee Nederlanders omgekomen op berg

ZERMATT, 9 APRIL. Twee Nederlandse alpinisten van 21 en 22 jaar zijn in Zwitserland omgekomen tijdens het afdalen van de noordhelling van de Matterhorn. Hun lichamen zijn vrijdag gevonden. De slachtoffers lagen op een hoogte van 3.200 meter.

Hoofdstuk 4: Beslissen onder onzekerheden

4.1 INLEIDING

In hoofdstuk 3 is in het stappenplan van de risico-analyse de plaats aangegeven van de toetsing van het risico en de besluitvorming. In figuur 4.1 is het stappenplan nogmaals gegeven. In de figuur zijn de aspecten van de analyse die een belangrijke rol spelen bij het beslissen onder onzekerheden licht gerasterd.
Dit hoofdstuk geeft een inleiding in de beslissingstheorie en staat stil bij het referentiekader als basis voor de besluitvorming. De beschouwing van het referentiekader beperkt zich in dit handboek tot de randvoorwaarden met betrekking tot de externe veiligheid. Deze randvoorwaarden zijn op zich weer het resultaat van een besluitvormingsproces.



Figuur 4.1 *Plaats van de besluitvorming op basis van de risico-analyse.*

Cur frame Page 56 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Beslissen is in feite een keuze uit alternatieven. De basis voor de moderne beslissingstheorie is het klassieke „Homo Economicus" model. De Homo Economicus:

> heeft complete informatie over de beslissituatie;
> kent alle alternatieven;
> kent de bestaande situatie;
> weet welke voordelen en nadelen ieder alternatief hem oplevert, zij het in de vorm van stochastische variabelen;
> streeft naar maximalisering van dat voordeel.

De in dit handboek behandelde stof over beslissen gaat uit van dit model.
De beslispraktijk ziet er dikwijls anders uit. Dat heeft voor veel praktijkgevallen geleid tot een uitbreiding van het model.
Beslissituaties worden gekarakteriseerd door: meerdere beslissers, met meerdere doelen en een aantal beslisfasen. Dit geeft geen aanleiding tot een fundamentele aanpassing van het principe van het klassieke model.
Eind jaren vijftig kwam het klassieke model onder vuur te liggen. De beslisser:

> kent niet alle alternatieven;
> kent niet alle effecten van de alternatieven;
> weet niet wat effect welk alternatief heeft.

March en Simon [4.1] introduceerden de „Gelimiteerde rationaliteit" bij het beslissen, dat wordt gekarakteriseerd door:

> het feit dat alternatieven niet beschikbaar zijn, maar moeten worden ontdekt en verder moeten worden ontwikkeld;
> het feit dat optimale beslissingen niet kunnen worden genomen en dat de beslisser tevreden moet zijn met bevredigende oplossingen.

Het model van Simon kan uitkomst bieden bij beleidsbeslissingen en ontwerpprocessen. Dit zijn situaties, waarin oplossingen nog moeten worden gevonden of ontwikkeld.

4.2 INLEIDING IN DE BESLISSINGSTHEORIE

4.2.1 DETERMINISTISCHE ANALYSE VAN HET BESLISSINGSPROBLEEM

Bij de analyse van het beslissingsprobleem wordt als eerste gezocht naar de antwoorden op de vragen:

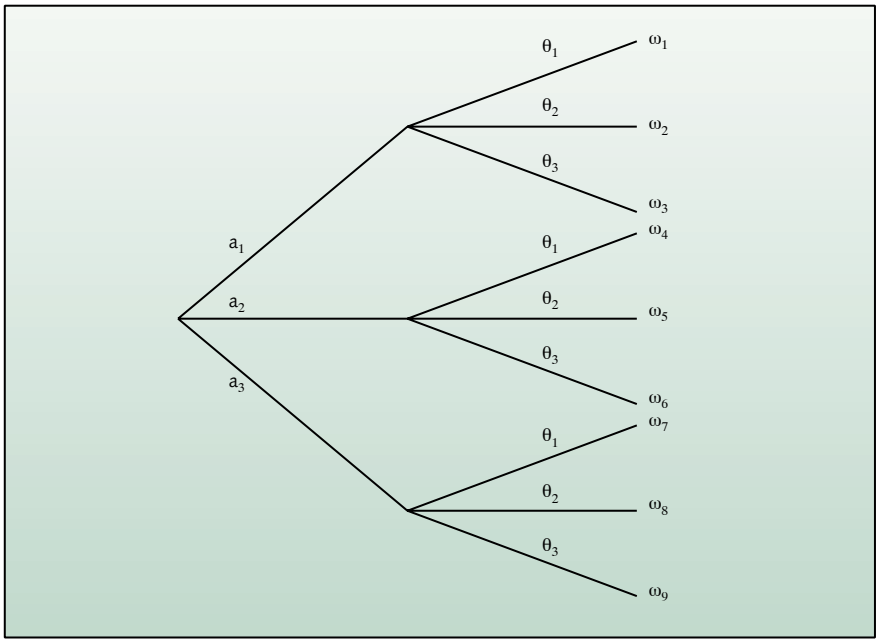
> uit welke acties kan de besluitvormer kiezen;
> wat zijn de mogelijke natuurlijke omstandigheden die het resultaat beïnvloeden;
> wat zijn de mogelijke resultaten als uitkomst van een gekozen actie en gegeven omstandigheden.

Cur frame Page 57 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De beantwoording van deze vragen resulteert in drie verzamelingen:

> A: de verzameling van alle mogelijke acties (a), waarvan er één moet worden gekozen;
> N: de verzameling van alle (natuurlijke) omstandigheden (θ);
> Ω: de verzameling van alle mogelijke resultaten (ω), die functies zijn van de acties en de omstandigheden: $\omega = f(a, \theta)$.

De acties, natuurlijke omstandigheden en de resultaten kunnen worden weergegeven in een zogenoemde beslissingsboom. In figuur 4.2 is hiervan een voorbeeld gegeven.



Figuur 4.2 *Beslissingsboom.*

Op basis van de mogelijke resultaten zal een keuze voor een actie worden gemaakt. Om de verschillende resultaten te kunnen rangschikken en beoordelen, wordt aan elke uitkomst van Ω een getalswaarde toegekend, waarmee het nut van de uitkomst wordt vastgelegd. Dit getal kan een geldbedrag zijn of een getal op een willekeurig gekozen schaal. In dit laatste geval heeft het nut geen absolute waarde, maar geeft het alleen de relatieve waarde van de verschillende uitkomsten.
De functie die aan elke uitkomst het nut toekent, staat bekend als de nutsfunctie. In het geval dat er sprake is van kosten en verliezen wordt de nutsfunctie ook wel „loss"-functie genoemd.
De nutsfunctie is te vergelijken met de gewichtenset van een multicriteria-analyse. Evenals bij de multicriteria-analyse is er sprake van subjectiviteit, omdat de functie wordt gekozen door de besluitvormer.
Het voorgaande kan het beste worden toegelicht met een voorbeeld.

Cur frame Page 58 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

VOORBEELD 4.1

Stel dat een persoon ƒ 1.000 tot zijn beschikking heeft en voor de keuze wordt gesteld om dit geld te beleggen in obligaties of aandelen van een gegeven onderneming.
Van de obligaties is bekend dat elk jaar 3 % van de huidige marktwaarde als rente wordt uitgekeerd. Van de aandelen is bekend dat het dividend afhankelijk is van de winst van de onderneming. Stel dat in de raad van bestuur van de onderneming de volgende afspraken zijn gemaakt:

- bij een winst die kleiner is dan 5 % van het aandeelhouderskapitaal, wordt geen dividend uitgekeerd;
- als de winst groter is dan 5 % van het aandeelhouderskapitaal, wordt dividend uitgekeerd, waarvan het percentage overeenkomt met 3 % van de huidige marktwaarde van de aandelen;
- als de winst groter is dan 10 % van het aandeelhouderskapitaal, komt het dividend overeen met 6 % van de huidige marktwaarde van de aandelen.

Aangenomen wordt dat de koers van het aandeel en de obligatie ten opzichte van elkaar niet veranderen, zodat er geen winstverschil is bij verkoop.
De verzameling A heeft twee elementen:

a_1 = beleggen in aandelen
a_2 = beleggen in obligaties

De verzameling N heeft drie elementen, te weten:

θ_1 = winst van de onderneming ≤ 5 %
θ_2 = 5 % < winst van de onderneming ≤ 10 %
θ_3 = winst van de onderneming > 10 %

Stel dat de inflatie 2 % bedraagt.
De uitkomstenruimte Ω met het rendement bevat dan drie mogelijke uitkomsten:

ω_1 = rendement (0 % – 2 %) = –2 % per jaar
ω_2 = rendement (3 % – 2 %) = 1 % per jaar
ω_3 = rendement (6 % – 2 %) = 4 % per jaar

De mogelijkheden zijn weer te geven in een beslissingsboom (zie fig. 4.3) of in een tabel (zie tabel 4.1).
Omdat de uitkomstenruimte bestaat uit vergelijkbare getallen, is voor het nemen van een rationele beslissing geen nutsfunctie noodzakelijk. Echter ter beoordeling van de verschillende uitkomsten kan het gewenst zijn om een schaal te kiezen tussen nul en één. Een rationele of risico neutrale nutsfunctie is in dit geval: u(–2 %) = 0, u(1 %) = 0,5 en u(4 %) = 1.
Het is mogelijk dat de belegger risico avers is en een verlies tweemaal zo zwaar ervaart als een winst. In dit geval is de nutsfunctie: u(–2 %) = –1, u(1 %) = 0,5 en u(4 %) = 1, of op een schaal tussen nul en één is dit: u(–2 %) = 0, u(1 %) = 0,75 en u(4 %) = 1.

Cur frame Page 59 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

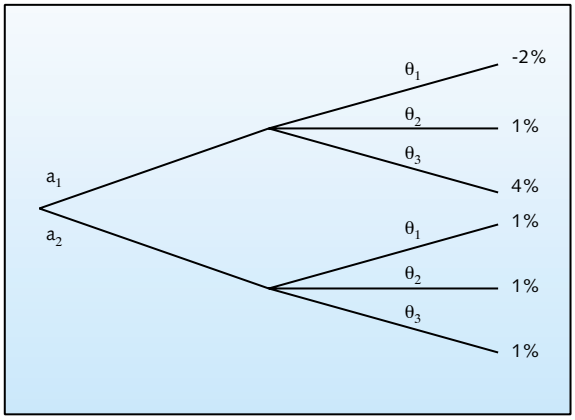
Anderzijds is het ook mogelijk dat de belegger niet veel waarde hecht aan kleine rendementen, maar juist bereid is om risico te nemen ten behoeve van een mogelijk hoog rendement. Het hogere rendement wordt dan opgewaardeerd naar bijvoorbeeld een nut van 2 in plaats van 1. De nutsfunctie is dan: u(–2 %) = 0, u(1 %) = 0,5 en u (4 %) = 2,0 of op een schaal van nul tot één: u(2 %) = 0, u(1 %) = 0,25 en u(4 %) = 1.
De nutsfuncties zijn samengevat in tabel 4.2.

Tabel 4.1 *Uitkomstenruimte*

		θ_1	θ_2	θ_3
	a_1	–2 %	1 %	4 %
	a_2	1 %	1 %	1 %

Tabel 4.2 *Nutsfuncties.*

		risico neutraal			risico avers			risico zoekend		
		θ_1	θ_2	θ_3	θ_1	θ_2	θ_3	θ_1	θ_2	θ_3
	a_1	0	0,5	1	0	0,75	1	0	0,25	1
	a_2	0,5	0,5	0,5	0,75	0,75	0,75	0,25	0,25	0,25



Figuur 4.3 *Beslissingsboom van voorbeeld 4.1.*

Een hulpmiddel bij het definiëren van een nutsfunctie van een persoon is het volgen van de procedure:

1. stel u(ω_{min}) = 0 en u(ω_{max}) = 1
2. definieer een kans P(x), zodanig dat de persoon geen voorkeur heeft voor één van de gebeurtenissen:
   E_1: het resultaat is zeker gelijk aan x
   E_2: er is een kans van 1 – P(x) op een resultaat ω_{min} en een kans van P(x) op een resultaat ω_{max}
3. stel u(x) gelijk aan P(x)

Cur frame Page 60 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

VOORBEELD 4.2

Stel dat van de belegger van voorbeeld 4.1 bekend is dat hij een kans van 0,25 op een verlies van 2 % als een acceptabel risico ervaart om aandelen te kopen in plaats van obligaties als de kans op 4 % rendement 0,75 is, dan wordt de nutsfunctie bepaald door:

1. u(–2 %) = 0; u(4 %) = 1
2. E_1: rendement is zeker 1 %
   E_2: rendement is –2 % met een kans van 1 – P(1 %) = 0,25 en 4 % met een kans van P(1 %) = 0,75
3. u(1 %) = P(1 %) = 0,75

Met de hier beschreven deterministische analyse wordt een overzicht en ordening verkregen van alle mogelijke resultaten als functie van de mogelijke beslissingen en omstandigheden.
De keuze van de beste actie is nog niet aan de orde geweest. Voor het kiezen van een actie zijn verschillende deterministische methoden beschikbaar, zoals de methoden met het maximin-criterium en het minimax-regret-criterium. Voor een beschrijving van deze methoden wordt verwezen naar [4.2].

4.2.2 PROBABILISTISCHE ANALYSE VAN HET BESLISSINGSPROBLEEM

De deterministische methoden zijn erop gericht om het ergste te voorkomen zonder rekening te houden met de waarschijnlijkheid van de verschillende omstandigheden. Dit is in de meeste gevallen een onnodig pessimistische opstelling.
Voor het nemen van rationele beslissingen moeten derhalve ook de waarschijnlijkheden van de omstandigheden worden geanalyseerd. Dit is een uitbreiding op de deterministische analyse. De kansen die bij de verschillende omstandigheden behoren, kunnen worden weergegeven in de beslissingsboom. Een rationele beslissing is het kiezen van de actie met de grootste verwachtingswaarde van het nut. Deze theorie staat bekend als de Bayesiaanse-beslissingstheorie.

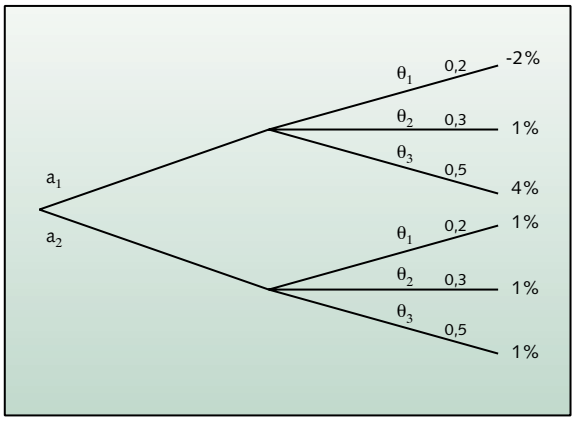
VOORBEELD 4.3

Stel dat voor de omstandigheden uit voorbeeld 4.1 de kansen op winst van de onderneming worden geschat op:

- 20 % kans op een winst kleiner dan of gelijk aan 5 % van het aandeelhouderskapitaal;
- 30 % kans op een winst groter dan 5 % en kleiner dan of gelijk aan 10 % van het aandeelhouderskapitaal;
- 50 % kans op een winst groter dan 10 % van het aandeelhouderskapitaal.

De beslissingsboom kan nu worden aangevuld met de kansen (zie fig. 4.4).
De verwachtingswaarde van het rendement van actie a_1: „het kopen van aandelen" bedraagt:
0,2 · (–2 %) + 0,3 · (1 %) + 0,5 · (4 %) = 1,9 %.
Dit is groter dan het 1 % rendement van actie a_2: „het kopen van obligaties".

Cur frame Page 61 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



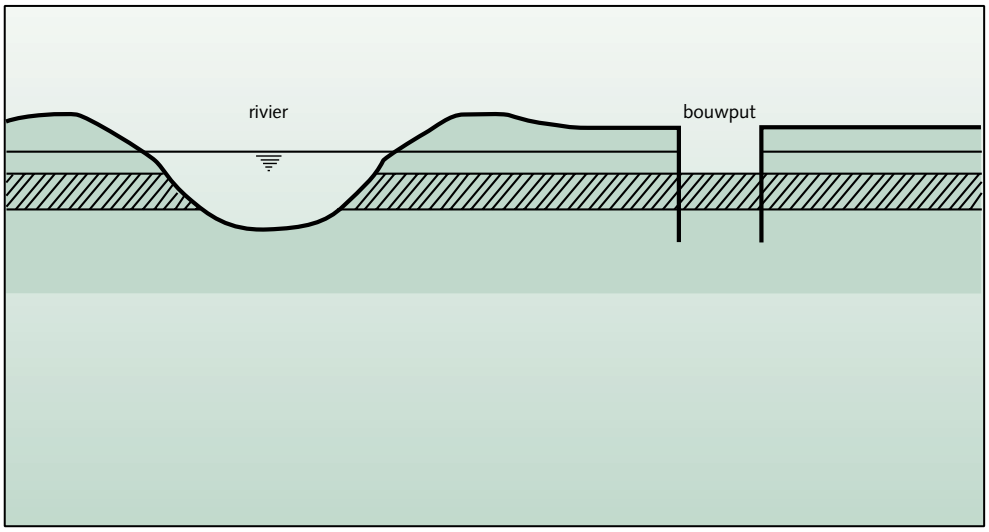
Figuur 4.4 *Beslissingsboom met waarschijnlijkheden.*

In het voorgaande is het aantal omstandigheden beperkt en de kansverdeling van de omstandigheden discreet. Bij veel beslissingsproblemen is dit niet het geval. De toestand van de natuur kan bijvoorbeeld zeer veel waarden aannemen, die zich niet laten discretiseren.
Dit zou bijvoorbeeld het geval zijn geweest als in voorbeeld 4.2 het dividend een percentage van de winst zou zijn geweest. Het winstpercentage is op voorhand niet bekend, maar zou kunnen worden geschat met een kansverdelingsfunctie. Met behulp van de kansverdeling kan de verwachtingswaarde van de winst van de onderneming en het dividend worden berekend.
Nu blijkt dat bij het nemen van beslissingen onder onzekerheden de probabilistische rekentechnieken een waardevol hulpmiddel zijn om te komen tot een rationele keuze. Dit is met name het geval als er risico's kunnen worden gedefinieerd die afhankelijk zijn van de mogelijke beslissingen. De Bayesiaanse beslissingstheorie geeft in dergelijke gevallen de beslissingen die de laagste som van de kosten en het risico realiseert. Dit kan het beste worden geïllustreerd aan de hand van een voorbeeld.

VOORBEELD 4.4

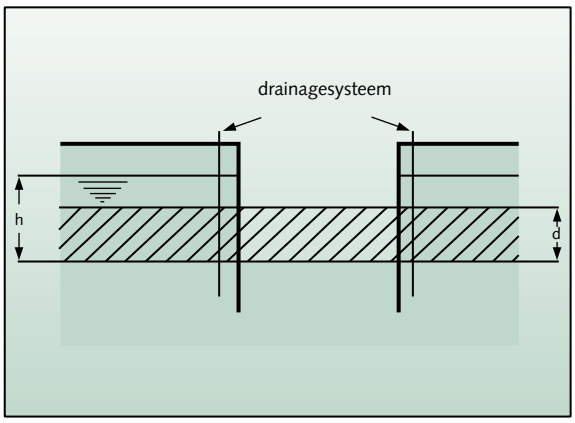
In een rivierpolder moet in een bouwput een kelder worden gebouwd. De bouwput bestaat uit damwanden en wordt aan de onderzijde afgesloten door een kleilaag met een dikte (d) van gemiddeld 2,5 m. De dikte is niet exact bekend; uit metingen volgt een standaardafwijking van 0,25 m.
De kleilaag wordt doorsneden door de rivier en de onderliggende zandlaag wordt gevoed door de rivier (zie figuur 4.5). De grondwaterpotentiaal in de bovenlaag is gelijk aan de potentiaal in de diepe zandlaag.
De opwaartse waterdruk onder de afsluitende laag is een directe functie van de waterstanden in de rivier. Door de fluctuatie van de waterstand in de rivier zal ook de opwaartse druk onder de afsluitende laag fluctueren.
Uit metingen van de rivierwaterstanden en de grondwaterstanden over langere periode is inzicht verkregen in de maximale grondwaterstanden. De maximale opwaartse druk (h) onder de afsluitende laag in de uitvoeringsperiode heeft een verwachtingswaarde van 4 m waterkolom en een standaardafwijking van 0,60 m waterkolom.

Cur frame Page 62 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 4.5 *Situatie.*

Met behulp van grondwaterstromingsberekeningen is gekeken naar het effect op de grondwaterstanden van een drainagesysteem aan de rand van de bouwput (zie fig. 4.6). Gebleken is dat de maximale opwaartse druk tijdens de uitvoering in dit geval kan worden geschematiseerd met een verwachtingswaarde van 4 mwk en een standaardafwijking van 0,10 mwk. Een dergelijk drainagesysteem kost ƒ 150.000.



Figuur 4.6 *Drainage rondom de bouwput.*

Naast de onzekerheden in de laagdikte en de opwaartse druk is er ook nog sprake van een mate van onzekerheid in het volumegewicht van de afdichtende laag. De gemiddelde waarde bedraagt 20 kN/m^3 en de standaardafwijking bedraagt 1 kN/m^3.
Het vollopen van de bouwput zal het opdrijven van de kelder ten gevolge hebben. De schade die daardoor ontstaat wordt geschat op ƒ 5.000.000.
De ontwerper van de bouwput staat voor de keuze of hij het ontwerp van de bouwput moet voorzien van een drainage of niet.

Cur frame Page 63 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Met behulp van een risico-analyse is de kans op vollopen van de bouwput zonder en met drainage berekend. Zonder drainage bedraagt deze kans $P_f = 0{,}12$. Met drainage is de kans $P_{fd} = 0{,}04$.
Het risico, gedefinieerd als de verwachtingswaarde van het verlies, bedraagt zonder drainage:
$0{,}12 \cdot f\ 5.000.000 = f\ 600.000$.
Met drainage is het risico: $0{,}04 \cdot f\ 5.000.000 = f\ 200.000$.
Voor de inzichtelijkheid wordt besloten om het beslissingsprobleem te illustreren met een beslissingsboom. Hiertoe moeten eerst de verzamelingen met acties, omstandigheden en uitkomsten worden gedefinieerd.
Verzameling A:

a_1 = geen drainage
a_2 = wel drainage

Verzameling N:

θ_1 = de afsluitende laag blijft intact
θ_2 = de waterdruk overschrijdt het gewicht van de afsluitende laag

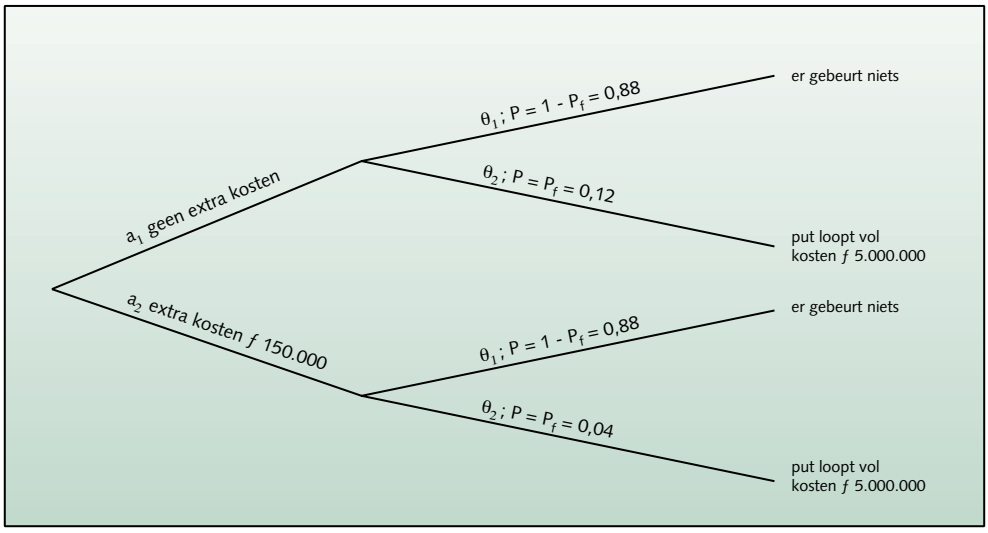
Verzameling Ω:

ω_1 = er gebeurt niets; verlies = f 0
ω_2 = de bouwput loopt vol: verlies = f 5.000.000

In de gebeurtenissenboom kunnen ook de kosten en de kansen worden weergegeven (zie fig. 4.7).
Voor de verschillende acties kunnen de verwachtingswaarden van de kosten worden berekend:

a_1: verwachtingswaarde kosten = risico = f 600.000
a_2: verwachtingswaarde kosten = extra kosten + risico = f 150.000 + f 200.000 = f 350.000

Hieruit volgt dat het aanleggen van het drainagesysteem rationeel de beste beslissing is.



Figuur 4.7 *Beslissingsboom met kansen en kosten.*

Cur frame Page 64 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Uit het voorgaande voorbeeld blijkt dat de risico-analyse een belangrijke rol speelt bij het rationeel nemen van beslissingen.

4.2.3 KEUZE UIT ONEINDIG VEEL MOGELIJKE ACTIES

In het voorgaande is het aantal acties, waaruit moet worden gekozen, beperkt tot een eindig aantal. Het komt echter voor dat het aantal acties ongelimiteerd is. Dit doet zich onder meer voor bij de keuze van een faalkansniveau voor een te ontwerpen systeem. Ook hier kan de Bayesiaanse beslissingstheorie een oplossing bieden.
Hiertoe wordt het risico gekapitaliseerd en vergeleken met de investeringen die nodig zijn om een bepaald faalkansniveau te kunnen garanderen.
Het risico moet worden beschouwd over een bepaalde periode, namelijk de periode waarin de activiteit plaatsheeft of de tijdsduur waarvoor een systeem wordt ontworpen. De investeringen in een bepaalde activiteit kunnen bestaan uit stichtingskosten en onderhoudskosten en kunnen gespreid over een periode plaatshebben.
In verband met de tijdsafhankelijkheid van de investeringen en het risico is het uit economisch oogpunt belangrijk dat het verloop van de kosten in de tijd in beschouwing wordt genomen.
Door de contante waarde van de verschillende kosten te berekenen, met in acht name van rente en inflatie, kunnen de kosten worden gesommeerd op een vast tijdstip.
De totale kosten (C_t) worden gedefinieerd als:

$$C_t = C_I + C_R \tag{4.1}$$

waarin:

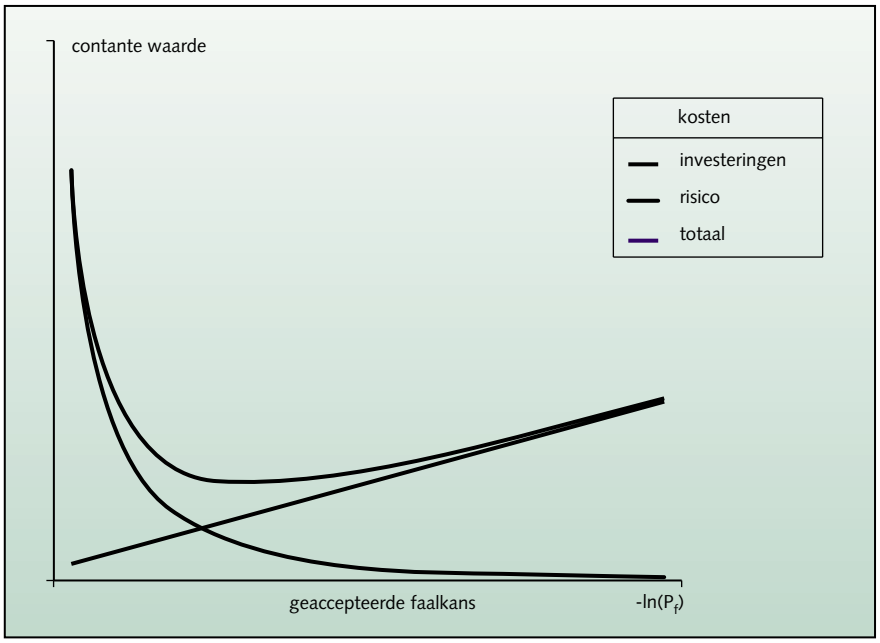
C_I is de contante waarde van de investeringen, bestaande uit stichtingskosten en onderhoudskosten;
C_R is de contante waarde van het risico.

In figuur 4.8 is het mogelijke verloop van de kosten als functie van de geaccepteerde faalkans van een systeem weergegeven. Het economische optimum voor de geaccepteerde faalkans is die faalkans, waarbij de totale kosten minimaal zijn. Ter plaatse van dit minimum geldt:

$$\frac{dC_t}{dP_f} = 0 \tag{4.2}$$

In de economische optimalisatie van het faalkansniveau moet de besluitvormer alle verliezen uitdrukken in geld. Hierbij kan hij stuiten op ethische problemen als het bijvoorbeeld gaat om doden en gewonden.

Cur frame Page 65 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 4.8 *Kosten als functie van de geaccepteerde faalkans.*

4.3 REFERENTIEKADER MET BETREKKING TOT VEILIGHEID

4.3.1 PROBLEMATIEK

Veiligheid is een subjectief begrip, soms zelfs niet meer dan een gevoel. Een goed voorbeeld hiervan is het veilige gevoel dat men heeft achter de Nederlandse dijken (met een faalkans van 1/1250 in een jaar) in verhouding tot het algemene standpunt ten aanzien van chemische fabrieken (met de kans op een dodelijk ongeval van 1/1.000.000 in een jaar).

Voor het toetsen van risico's aan normen is een meer objectieve formulering van het begrip veiligheid noodzakelijk. Een grote veiligheid staat gelijk aan een klein risico en omgekeerd is een groot risico gelijk aan een kleine veiligheid. Op grond hiervan is het aannemelijk om de veiligheid uit te drukken in termen van risico, zodat de mate van veiligheid is te kwantificeren. Een gewenste veiligheid resulteert dan in een acceptabel risico.

Het antwoord op de vraag „wat is een acceptabel risico" is niet eenvoudig en afhankelijk van een groot aantal factoren. Mede door de verschillende dimensies van het risico, zoals bijvoorbeeld economische schade, letsel en emotionele schade is het vergelijken en toetsen van risico's moeilijk of soms zelfs onmogelijk.

De huidige veiligheidsnormen beperken zich tot het gevolg „overlijden", zodat gebruik kan worden gemaakt van de overlijdingsstatistieken.

In het verleden zijn drie toetsingscriteria ontwikkeld, te weten:

> de persoonlijke acceptatie van risico's;
> de maatschappelijke acceptatie van risico's;
> het economische criterium.

Cur frame Page 66 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De persoonlijke acceptatie van een bepaald risico zal in sterke mate afhangen van het voordeel dat het individu behaalt uit de activiteit die het risico veroorzaakt. Zelden of nooit zal echter een bewuste risico-analyse worden gemaakt, waarbij het kans- en gevolgdeel van het risico worden gekwantificeerd en uitgezet tegen de baten.
De mate van vrijwilligheid van activiteiten speelt eveneens een belangrijke rol bij de risico-acceptatie.
Bij volledige vrijwilligheid worden beslissingen doorgaans snel genomen met als achtergrond dat een keuze direct kan worden gewijzigd als blijkt dat het risico groter is dan aanvankelijk was aangenomen.
Het persoonlijk geaccepteerde risico-niveau is volgens DANTZIG [4.3] gedefinieerd als de door een individu geaccepteerde frequentie van het oplopen van een bepaalde mate van letsel ten gevolge van een gebeurtenis. Hier is de beschouwde mate van letsel beperkt tot overlijden.
De maatschappelijke acceptatie heeft betrekking op risico's voor de totale bevolking. Hoewel in de maatschappelijke besluitvorming voor elk project de maatschappelijke baten worden afgewogen tegen de maatschappelijke lasten, waaronder ook de risico's, is het waarde-oordeel van geaccepteerde risico's meestal moeilijk expliciet te onderscheiden. Het vaststellen van de maatschappelijke acceptatie heeft doorgaans proefondervindelijk plaats. De overheid doet bepaalde al dan niet expliciete keuzen, waarna het verdere verloop van gebeurtenissen in de tijd uitwijzen hoe juist de keuzen zijn geweest.
De gemeenschap kijkt naar het totale gevolg van een gebeurtenis, waaronder het aantal slachtoffers, materiële en economische schade en het verlies van immateriële zaken.
In het algemeen wordt bij veiligheidsproblemen de beschouwing van maatschappelijke gevolgen beperkt tot het aantal slachtoffers ten gevolge van een gebeurtenis. Het maatschappelijk geaccepteerde risico kan worden beschreven met een begrenzing van de kans op een aantal doden als gevolg van een activiteit.
In [4.3] is het maatschappelijke gevolg beschouwd als de totale materiële schade. Deze definitie is meer geschikt voor een economische optimalisatie van het te accepteren risico-niveau volgens de methode van 4.2.3, hoewel in de theorie ook slachtoffers kunnen worden meegenomen.
Onderkend wordt dat een beperkte beschouwing van de gevolgen in de vorm van het aantal slachtoffers of de economische schade niet voldoende is om de maatschappelijke beleving van het verlies te beschrijven, echter voorlopig is een betere modellering nog niet beschikbaar.
Het verschil tussen het maatschappelijke en het persoonlijke risico kan eenvoudig worden geïllustreerd met een voorbeeld.

VOORBEELD 4.5

Een, uit persoonlijk standpunt, redelijk veilig stuk speelgoed heeft een risico van 10^{-4} slachtoffers per exemplaar per jaar. In het jaar van introductie van het speelgoed zijn er slechts 1000 exemplaren verkocht. De verwachtingswaarde van het aantal slachtoffers, als gevolg van het speelgoed, bedraagt dan dus 0,1 per jaar. Redelijkerwijs geeft dit geen aanleiding tot een maatschappelijk gevoel van onveiligheid.
In het volgende jaar blijkt het speelgoed een rage te zijn en zijn er 10^{7} exemplaren verkocht, waardoor het gemiddelde aantal slachtoffers circa 1000 per jaar bedraagt, wat maatschappelijk niet acceptabel is.

Alvorens op de risico-acceptatie in te gaan, wordt in 4.3.2 een aantal mogelijke typen randvoorwaarden gegeven, die kunnen worden gebruikt voor het modelleren van het acceptabele risico.
In 4.3.3 zijn de huidige Nederlandse veiligheidsnormen volgens het ministerie van Volkshuisvesting, Ruimtelijke Ordening en Milieubeheer beschreven. Met de huidige normen wordt slechts gekeken naar één

Cur frame Page 67 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

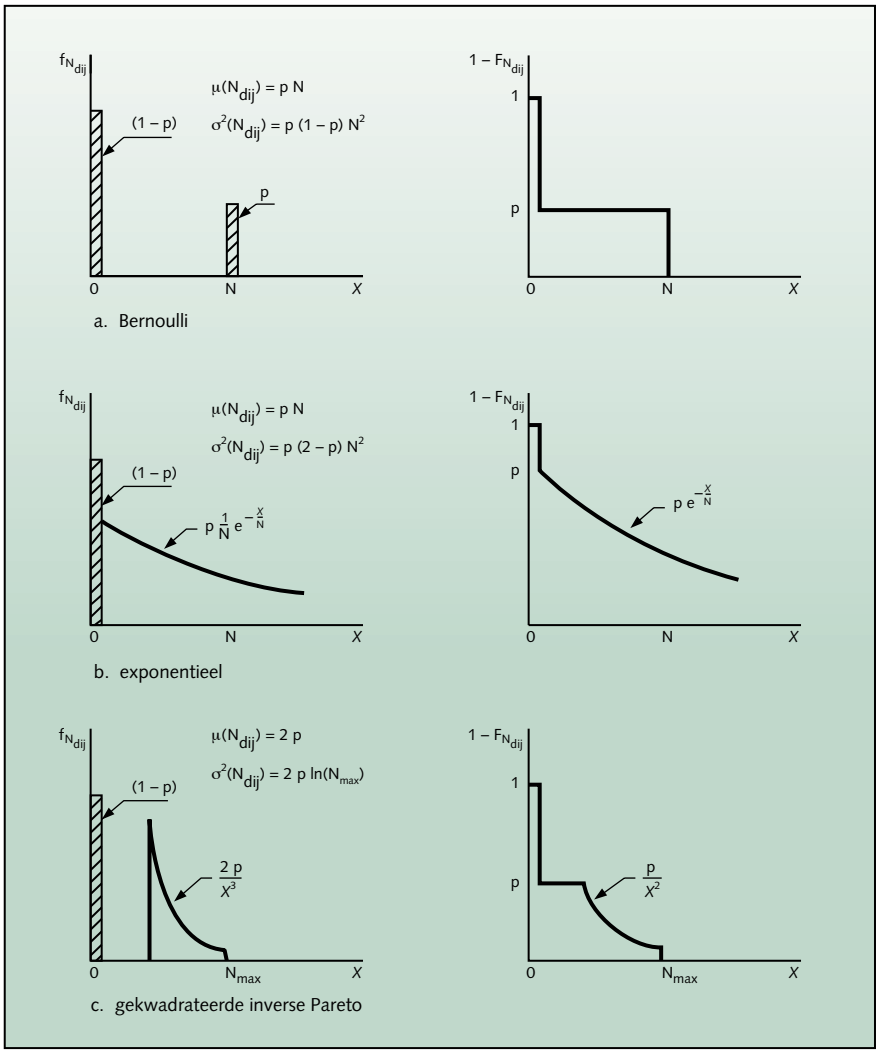
locatie en niet naar de gevolgen op nationaal niveau. Tevens is er niet expliciet rekening gehouden met de persoonlijke en maatschappelijke baten en de economische aspecten van het risico en de activiteit.
Een algemeen toepasbare methode voor het bepalen van toelaatbare risico's, waarbij deze aspecten wel in rekening kunnen worden gebracht, is beschreven in 4.3.4. Deze methode [4.4] voor het bepalen van een acceptabel risico-niveau met betrekking tot overlijden is gebaseerd op de sterke punten van de studies van de Technische Adviescommissie voor de Waterkeringen [4.5] en die van het ministerie van Volkshuisvestiging, Ruimtelijke Ordening en Milieubeheer [4.6] en is daarmee geënt op de Nederlandse omstandigheden.

4.3.2 TYPE RANDVOORWAARDEN

In een enkel geval zijn de gevolgen van falen exact bekend. Doorgaans is dit echter niet het geval. Het gevolg van falen is daarom het beste te beschrijven als stochastische variabele.
Als voorbeeld kan een verkeersongeval worden genomen, waarbij de schade als gevolg van een bepaald type aanrijding niet exact kan worden voorspeld. De schade is afhankelijk van een groot aantal factoren, zoals de snelheid, de sterkte en de massa van de voertuigen. Het gevolg kan zowel een continue als discontinue stochastische variabele zijn.
De beschrijving van de aanvaardbaarheid van het risico kan een functie zijn van het gevolg. Deze functie geeft dan voor alle mogelijke gevolgen een maximaal toelaatbare overschrijdingskans.
Het persoonlijk geaccepteerde risico, in de vorm van een maximaal toelaatbare overlijdingskans als gevolg van een activiteit, heeft één waarde als randvoorwaarde. Er is dan dus sprake van een discontinue stochastische variabele met twee mogelijke waarden: „overlijden" en „niet overlijden".
Als het gevolg van falen een continue variabele is, is het doorgaans niet voldoende om één grenswaarde te geven voor het risico. De risico-acceptatie hangt namelijk in veel gevallen af van de ernst van het gevolg van falen. Een alternatief is dan de gevolgen te wegen en het risico te definiëren volgens definitie 4 van hoofdstuk 3. Met name bij de maatschappelijke acceptatie van risico's, met een aantal doden als gevolg van falen, speelt dit een rol. In dergelijke gevallen kan een begrenzing worden gesteld aan de kansverdeling van het aantal doden in een jaar ten gevolge van een activiteit.
De randvoorwaarde in de vorm van een begrenzing van de kansdichtheidsfunctie van het jaarlijkse aantal doden N_{dij} ten gevolge van activiteit i op plaats j kan verschillende vormen aannemen. Drie mogelijke vormen zijn gegeven in figuur 4.9 [4.7]. Deze functies kunnen ook worden gebruikt voor andere vormen van verlies, zoals economische schade.
De eerste is de Bernoulli-verdeling, die slechts twee mogelijkheden kent, namelijk N doden met een kans p of geen doden met een kans 1 – p. Deze verdeling is geschikt als randvoorwaarde voor activiteiten, waarbij falen leidt tot een exact bekend verlies. Dit is bijvoorbeeld het geval bij het persoonlijke risico met betrekking tot overlijden.
De tweede functie is de exponentiële verdeling, die continu en exponentieel verdeeld is op het interval tussen nul en oneindig. Deze verdeling is geschikt voor het modelleren van economische verliezen of het aantal doden als gevolg van een activiteit.
De derde is de minder bekende inverse kwadratische Pareto-verdeling. Deze verdeling stemt overeen met de normen van het ministerie van VROM. De Pareto verdeelde variabele kan een waarde nul of een waarde tussen één en een maximum aannemen. Deze functie is met name geschikt voor het modelleren van het aantal slachtoffers ten gevolge van een activiteit.
De exponentiële en de inverse kwadratische Pareto-verdeling modelleren de gevallen, waarbij het aantal slachtoffers bij falen afhangt van tal van factoren, zoals de ernst van falen, het tijdstip, de effectiviteit van

Cur frame Page 68 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

hulp en herstel, enzovoorts. Voor de beide modellen geldt dat een groter aantal slachtoffers steeds onwaarschijnlijker wordt gevonden.



Figuur 4.9 *Theoretische kansdichtheidsfuncties en overschrijdingskrommen van de gevolgen van een activiteit.*

4.3.3 HUIDIGE NEDERLANDSE VEILIGHEIDSNORMEN

Persoonlijk acceptabel risico

Onder het persoonlijk acceptabel risico wordt verstaan: „de acceptabele kans dat een individu zijn leven verliest ten gevolge van een activiteit van een ander". Als basis voor het bepalen van het persoonlijk acceptabel risico dient de levensverwachting van de Nederlandse bevolking.

Uit een analyse van statistische gegevens is gebleken dat jonge mannen van 6 tot 20 jaar een kans op overlijden in een jaar hebben van 10^{-4}. In deze analyse zijn alle mogelijke doodsoorzaken in beschouwing genomen en is er geen onderscheid gemaakt naar activiteiten.

Cur frame Page 69 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Er is gekeken naar de verandering in de verwachtingswaarde van de levensduur ten gevolge van een toegevoegde kans op overlijden in een jaar. Dit is samengevat in tabel 4.3.

Tabel 4.3 *Toegevoegde kans op overlijden in een jaar.*

	extra kans op overlijden in een jaar	verwachte leeftijd	afname van de levensduur in jaren	afname van de verwachte levensduur in dagen
	10^{-3}	74,97	3,16	1153
	10^{-4}	77,81	0,32	117
	10^{-5}	78,10	0,03	11
	10^{-6}	78,13	0,00	1
	10^{-7}	78,13	0,00	0

Voor de acceptatie van een activiteit is gesteld dat de toename van de kans op overlijden niet meer dan 1 % mag bedragen. De maximaal toegestane overlijdingskans bij een activiteit bedraagt dan 10^{-6}.
De faalkans of de kans op een ongeval ten gevolge van een activiteit is derhalve:

$$P_{fi} \leq \frac{10^{-6}/\text{jaar}}{P_{d|fi}} \tag{4.3}$$

waarin:

P_{fi} is de kans op een ongeval in een jaar als gevolg van activiteit i (faalkans);
$P_{d|fi}$ is de kans op overlijden van een persoon na een ongeval.

Deze formulering houdt geen rekening met een mate van vrijwilligheid. Ook ontbreekt de invloed van de baten van de activiteit in de mate van risico-acceptatie. De methode die is beschreven in 4.3.4 voorziet hierin wel.

Maatschappelijk acceptabel risico-niveau

Het door het ministerie van VROM gedefinieerde maatschappelijk acceptabel risico-niveau heeft betrekking op de kansdichtheid van het aantal doden per jaar ten gevolge van een activiteit op één enkele locatie. Het maatschappelijke risico van een activiteit wordt acceptabel geacht als de kansverdeling van het aantal doden per jaar op elke onafhankelijke locatie voldoet aan:

$$1 - F_{N_{dij}}(n) < \frac{10^{-3}}{n^2} (\text{voor alle } n > 10) \tag{4.4}$$

waarin:

$F_{Ndij}(n)$ is de kansverdelingsfunctie van het aantal doden in een jaar ten gevolge van activiteit i op plaats j;
n is de realisatie van N_{dij};
N_{dij} is het aantal doden op plaats j ten gevolge van activiteit i.

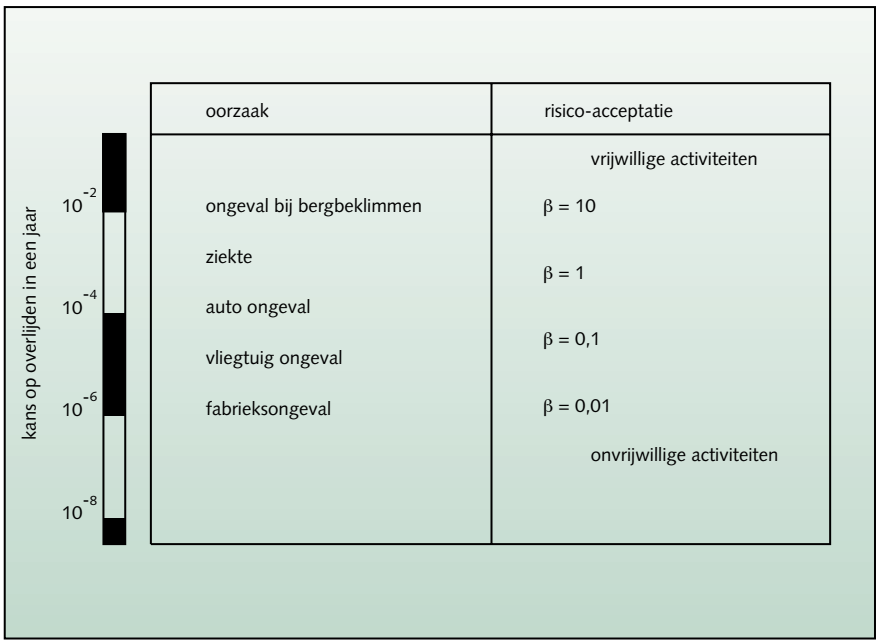
Cur frame Page 70 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Deze formulering is het resultaat van een politiek proces, waarbij de dood van 10 mensen in een jaar ten gevolge van het falen van een LPG-station met een kans van 10^{-5} is geaccepteerd.
Met vergelijking (4.4) wordt slechts gekeken naar één locatie en niet naar de gevolgen op nationaal niveau. Tevens is er niet expliciet rekening gehouden met de maatschappelijke baten en lasten en het economische risico van een activiteit.

4.3.4 ALGEMEEN TOEPASBARE VEILIGHEIDSNORMEN

Persoonlijk acceptabel risico

Met behulp van de ongevallenstatistiek is voor verschillende activiteiten geïnventariseerd wat de kans op een dodelijk ongeval is (zie fig. 4.10). Uit deze inventarisatie blijkt, zoals verwacht, dat de mate van vrijwilligheid van de activiteit een grote invloed heeft op het geaccepteerde risico.



Figuur 4.10 *Ongevallenstatistiek.*

Een eenvoudige formulering van het geaccepteerde risico, die hiermee rekening houdt, is:

$$P_{fi} \leq \frac{\beta_i \cdot 10^{-4}}{P_{d|fi}} \qquad (4.5)$$

waarin:

- P_{fi} is de kans op een ongeval ten gevolge van activiteit i;
- $P_{d|fi}$ is de kans op overlijden na een ongeval;
- β_i is de beleidsfactor die wordt bepaald op basis van de mate van vrijwilligheid en/of belang van het individu bij de activiteit, varirend van 10 tot 0,01.

Cur frame Page 71 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De toepasbaarheid van deze vergelijking beperkt zich tot die gevallen, waarbij overlijden het belangrijkste gevolg is van het falen van een systeem of van een ongeval. Het materiële risico van een individu komt verder niet aan de orde.

Maatschappelijk acceptabel risico-niveau

Met betrekking tot de maatschappelijke acceptatie van risico's ligt het voor de hand de risico's van een activiteit op nationaal niveau in beschouwing te nemen. Bij het ontwerp en beheer van objecten of het uitoefenen van een bepaalde activiteit is men over het algemeen juist slechts geïnteresseerd in de te stellen lokale veiligheidseisen.

Als de risico's op lokaal niveau bekend zijn, is het risico op nationaal niveau bepaald door het aantal onafhankelijke locaties waar de activiteit plaatsheeft. De normstelling van de maatschappelijk toelaatbare risico's kan echter beter op nationaal niveau plaatshebben, om vervolgens het acceptabele risico op lokaal niveau vast te stellen.

Als model voor het maatschappelijk geaccepteerde risico op nationaal niveau kan de kans op het overlijden van een persoon uit een groep mensen, ter grootte van de gemiddelde kennissenkring (100 personen), ten gevolge van een onvrijwillige activiteit, dienst doen. Deze kans bedraagt circa $1{,}4 \cdot 10^{-3}$ in een jaar [4.5]. Rekening houdend met de beleidsfactor $\beta_i = 0{,}1$ (zie fig. 4.10) voor dergelijke activiteiten kan deze kans ook worden geschreven als $1{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot \beta_i$. De kans op overlijden ten gevolge van een activiteit in een jaar op nationale schaal kan worden gedefinieerd als de verwachtingswaarde van het aantal doden in een jaar gedeeld door de totale populatie. De kans dat een persoon uit een groep van 100 personen als deelverzameling van de totale populatie in een jaar overlijdt ten gevolge van de beschouwde activiteit is:

$$\frac{E(N_{di})}{\text{totale populatie}} 100 \qquad (4.6)$$

waarin:

$E(N_{di})$ is de verwachtingswaarde van het aantal doden in een jaar ten gevolge van activiteit i op nationale schaal.

Met een totale populatie van circa 14 miljoen mensen resulteert dit in de eis:

$$\frac{E(N_{di})}{14 \cdot 10^6} 100 < \beta_i \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-2} \qquad \text{of} \qquad E(N_{di}) < \beta_i \cdot 100 \qquad (4.7)$$

VOORBEELD 4.6

Stel dat voor het speelgoed van voorbeeld 4.5 een beleidsfactor $\beta = 0{,}1$ toelaatbaar wordt geacht. De vraag is dan aan welke eis de kans op overlijden in een jaar, ten gevolge van het spelen met het bewuste speelgoed, moet voldoen.

Uitgaande van 10^7 verkochte stukken speelgoed bedraagt de verwachtingswaarde van het aantal doden $E(N) = 10^7 \cdot P_{fij}$.

De toelaatbare kans op overlijden bedraagt dan $P_{fij} = 10 \cdot 10^{-7} = 10^{-6}$.

Cur frame Page 72 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

In deze formulering wordt alleen rekening gehouden met de verwachtingswaarde van het aantal doden in een jaar en niet met de spreiding rondom deze verwachtingswaarde. De mate waarin de spreiding van belang is bij de risico-acceptatie, is afhankelijk van de risico aversie van de populatie.
Om de spreiding in rekening te brengen wordt de verwachtingswaarde van het aantal doden verhoogd met k maal de standaardafwijking van het aantal doden, dus:

$$E(N_{di}) + k\sigma_{N_{dij}} < \beta \cdot 100 \qquad (4.8)$$

De factor k is te interpreteren als een risico aversie index.

VOORBEELD 4.7

Voor hetzelfde speelgoed als in voorbeeld 4.6 geldt dat de variantie van het aantal doden per jaar gelijk is aan:

$$\sigma^2 = NP_{fij}(1 - P_{fij}) \approx NP_{fij}$$

Uitgaande van $N = 10^7$ verkochte stukken speelgoed bedraagt de standaardafwijking van het aantal doden:

$$\sigma = \sqrt{10^7 P_{fij}}$$

Als k = 3 dan volgt de toelaatbare kans op overlijden uit:

$$10^7 P_{fij} + 3\sqrt{10^7 P_{fij}} \leq 10 \Rightarrow P_{fij} = 4 \cdot 10^{-7}$$

Om vanuit de risico-acceptatie op nationaal niveau het acceptabele risico op lokaal niveau te bepalen, moet naast de spreiding in het aantal doden per jaar ook de geologische spreiding van de activiteit in rekening worden gebracht.
In [4.4] is een formulering voor de risico-acceptatie op lokaal niveau conform vergelijking (4.4) gepresenteerd.
Deze luidt:

$$1 - F_{N_{dij}}(n) \leq \frac{C_i}{n^2} \qquad \text{voor alle } n \qquad \text{met} \qquad C_i = \left(\frac{\beta_i \cdot 100}{k\sqrt{N_a}}\right)^2 \qquad (4.9)$$

waarin:

N_a is het aantal onafhankelijke locaties waar de activiteit plaatsheeft.

Cur frame Page 73 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Voor de afleiding van deze vergelijking wordt verwezen naar [4.4].
Deze eis komt overeen met de eis van VROM voor chemische fabrieken als $\beta_i = 0{,}03$, $N_a = 1000$ en $k = 3$.

VOORBEELD 4.8

Voor hetzelfde probleem als in voorbeeld 4.7 geldt:

$$C_i = \left(\frac{0{,}1 \cdot 100}{3\sqrt{10^7}}\right) = 1{,}1 \cdot 10^{-7}$$

De toelaatbare kans op overlijden volgt uit:

$$P_{fij} = 1 - F_{N_{dij}}(1) = \frac{1{,}1 \cdot 10^{-7}}{1} = 1{,}1 \cdot 10^{-7}$$

Als het economisch optimale risico, bepaalt volgens 4.2.3, groter is dan het persoonlijk of maatschappelijk geaccepteerde risico, zal het economische optimum niet worden toegepast als toetsingscriterium.

LITERATUUR

Aanbevolen literatuur

4.1. MARCH, J.G. en H.A. SIMON, Organizations. John Wiley, New York, 1958.
4.2. BEDFORD, T., Statistiek en operationele analyse. Collegedictaat, Technische Universiteit Delft, Delft, mei 1993.
4.3. DANTZIG, V.D. en J. KRIENS, Rapport van de Deltacommissie, deel 3. Rijkswaterstaat, Den Haag, 1960.
4.4. VRIJLING J.K., W. van HENGEL en R.J. HOUBEN, A framework for risk evaluation. Technische Universiteit Delft en Bouwdienst Rijkswaterstaat, Delft, 1994.
4.5. Technische Adviescommissie voor de Waterkeringen, Some considerations on acceptable risk in the Netherlands. Dienst Weg en Waterbouwkunde, Rijkswaterstaat, Delft, 1984.
4.6. Ministerie van Volkshuisvesting, Ruimtelijke Ordening en Milieubeheer, Nationaal Milieubeleidsplan. Den Haag, 1988.
4.7. VRIJLING J.K., W. VAN HENGEL en R.J. HOUBEN, What is acceptable risk. Technische Universiteit Delft en Bouwdienst Rijkswaterstaat, Delft, 1993.

Geraadpleegde literatuur:

4.8. CUR-rapport 141, Probabilistic design of flood defences. CUR, Gouda, 1993.
4.9. Gezondheidsraad, Niet alle risico's zijn gelijk. Kanttekeningen bij de grondslag van de risicobenadering in het milieubeleid, 1995.
4.10. HILLIER en LIEBERMAN, Introduction to operations research. McGraw-Hill international editions, 1990.

Police probe repeat Munich tunnel breach

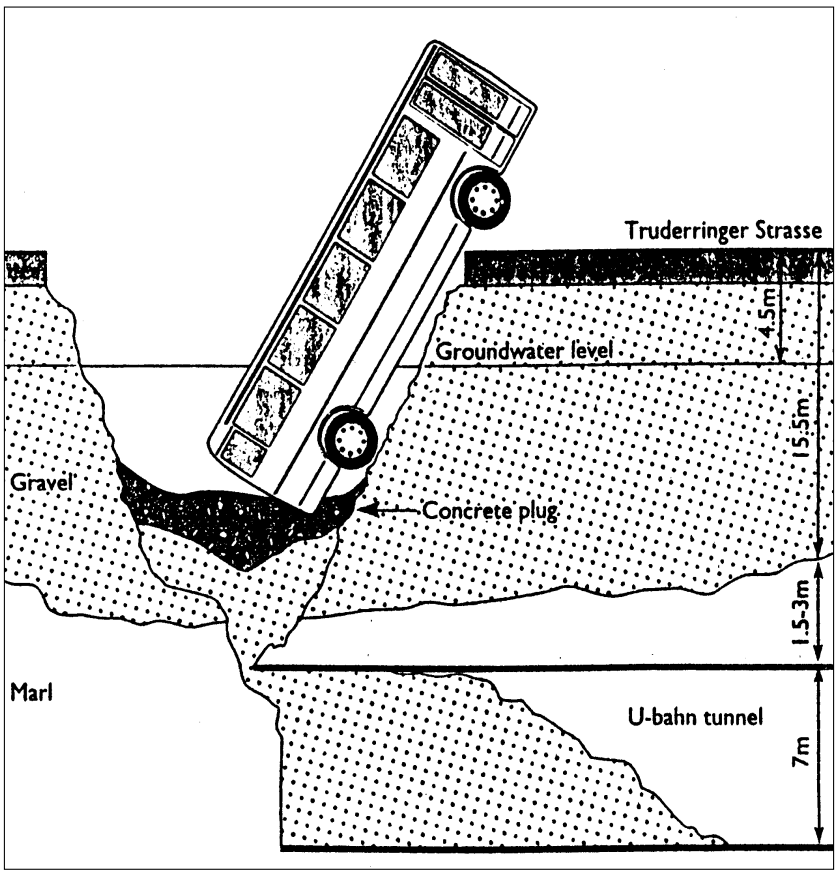
Work on the DM156M ($100M) second phase of Munich's U-Bahn U2 underground extension has been suspended pending on the outcome of a criminal investigation into a major tunnel collapse.

Two people died and 30 were injured when a crowded bus was sucked into a hole that suddenly opened up in the middle of the main road leading to the eastern suburb of Trudering.

The New Austrian Tunnelling Method was being used by a contracting consortium when the collapse occurred at 6pm Tuesday 27 September, leaving a hole about 20m wide and 18,5m deep.

The accident bore all the hallmarks of a very similar collapse in the same city in 1980 (see box).

Work stopped to allow the two bodies to be recovered from the hole and is expected to remain suspended until a police investigation is completed.



The tunnel affected was one of twin running tunnels being driven west during 24 hour working from a central access shaft. NATM was being used in a strata of flinty marl, overlain by some 15,5m of groundwater bearing gravel. The Munich area has a high water table, just 4m below ground level. The tunnel had a cover of between 3m and 1,5m of marl above the soffit, but it appears that the drive to the east hit an unforeseen local depression in the marl stratum after less than 50m of progress, prompting the collapse.

City of Munich divisional engineering director Dr. Stephan Scharrer told CT the collapse was preceded by an influx of water at the tunnel face and caused by a breach of the tunnel soffit. However, he said the exact nature of the breach had yet to be determined.

NATM is being used for the entire length of the 5km of tunnels from Kreillerstrasse to the east of a new station near Trudering. The Trudering Station will also provide a connection with the existing S-Bahn overground railway line S6.

Workers in the tunnel had enough warning to flee before the tunnel was flooded with tonnes of water and gravel for 20m along its length, but nothing could prevent the bus from plunging into the void.

The collapse also undermined the foundations of an adjacent apartment block and a shop. They were temporarily stabilised after the hole was plugged with concrete and supported with crushed stone fill ordered by City of Munich engineers.

The bus, which was partially embedded in the concrete that was poured in, was later cut in two and lifted free by crane.

Police, state and city authorities were still discussing how to remove the bodies without inundating the cavity with the fast flowing groundwater and disturbing evidence. A diaphragm wall around the accident site was being considered.

The second phase of the underground link started in December 1993 and is due for completion of four of Germany's largest contractors - Dyckerhoff & Widmann (Dywidag), Hochtief, Bilfinger & Berger, and Wayss & Freytag.

Police imposed a publicity ban and all those involved were forbidden to talk about the accident.

Neil Doyle in Munich

Bron: Construction Today, October 1994

Cur frame Page 75 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Hoofdstuk 5: Betrouwbaarheid van een element

5.1 INLEIDING

5.1.1 OVERZICHT

Het Van Dale Groot Woordenboek der Nederlandse Taal definieert betrouwbaarheid als:

Het feit of de mate waarin iets of iemand te betrouwen of geloofwaardig is.

In de kansrekening wordt dit uitgelegd als de mate waarin het waarschijnlijk is dat iets naar behoren functioneert. De betrouwbaarheid wordt volgens deze uitleg uitgedrukt in een kans op goed functioneren. In hoofdstuk 3 is reeds vermeld dat de overgang van goed functioneren naar falen langs verschillende wegen kan plaatshebben. De wijze van falen wordt een faalmechanisme of kortweg een mechanisme genoemd. Dit hoofdstuk beperkt zich tot de beschouwing van de situatie, waarbij één mechanisme mogelijk is. In hoofdstuk 6 wordt nader ingegaan op de betrouwbaarheid in het geval er meer faalmechanismen kunnen optreden. Bij de beschouwing van de betrouwbaarheid van een element staat de bepaling van de kans op falen centraal. In deze inleiding worden begrippen als grenstoestand, sterkte, belasting, berekeningsniveaus en tijdsafhankelijkheid verduidelijkt. In 5.2 tot en met 5.4 wordt nader ingegaan op de berekeningsmethoden van de faalkans. De tijdsafhankelijkheid komt in 5.5 nader aan de orde.

5.1.2 GRENSTOESTAND, STERKTE EN BELASTING

De toestand waarbij nog juist geen falen optreedt, is een grenstoestand. De betrouwbaarheid is de kans dat deze grenstoestand niet wordt overschreden. Met behulp van grenstoestanden is het dikwijls mogelijk om de zogenoemde betrouwbaarheidsfuncties te definiëren. De algemene gedaante van een betrouwbaarheidsfunctie is:

$$Z = R - S \tag{5.1}$$

waarin:

R is de „sterkte" (resistance) of meer algemeen de weerstand tegen falen;
S is de „belasting" (sollicitation) ofwel datgene dat falen bevordert.

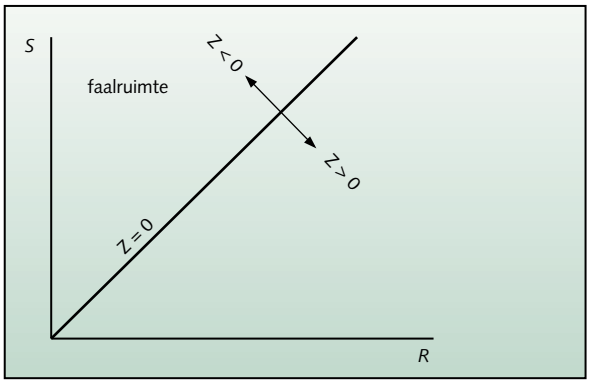
In figuur 5.1 is de betrouwbaarheidsfunctie getekend in het *RS*-vlak. In dit vlak is de faalruimte aangegeven. De grenstoestand wordt beschreven door Z = 0. De kans op falen is:

$$P_f = P(Z \leq 0) = P(S \geq R) \tag{5.2}$$

De betrouwbaarheid is de kans P(Z > 0) en is dus het complement van de faalkans, in formulevorm:

$$P(Z > 0) = 1 - P_f \tag{5.3}$$

Cur frame Page 76 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 5.1 *Betrouwbaarheidsfunctie in het RS-vlak.*

Het punt in de faalruimte met de grootste kansdichtheid wordt het ontwerppunt genoemd. Doorgaans ligt dit punt op de grens tussen het veilige en onveilige gebied. Ook is het mogelijk dat er meer ontwerppunten voorkomen. In deze punten heeft de kansdichtheid een lokaal maximum. Het ontwerppunt speelt een belangrijke rol bij verschillende technieken voor het schatten van de faalkans.

Een analyse van de betrouwbaarheid, waarbij de faalkans wordt berekend met (5.2), staat in de literatuur bekend als een „structural reliability analysis". Het is ook mogelijk dat de faalkans direct wordt bepaald met behulp van een statistische bewerking van waarnemingen zonder een analyse te maken van sterkte en belasting. In bijlage D is een (niet volledig) overzicht gegeven van een aantal databases.
Deze methode is zeer bruikbaar, wanneer het gaat om serieproducten. Van dergelijke producten zijn doorgaans voldoende faalgegevens beschikbaar om een goede schatting te kunnen maken van de faalkans.
Meestal is de sterkte in de „structural reliability analysis" afhankelijk van een aantal verschillende parameters. Zo is de treksterkte van een stalen staaf afhankelijk van de minimale doorsnede van de staaf en van de vloeispanning van het staal.
Het begrip sterkte moet zeer ruim worden opgevat. Bij financiële vraagstukken kan falen bijvoorbeeld worden gedefinieerd als het overschrijden van de baten door de lasten. In dit geval vormen de baten de sterkte in een risico-analyse.
Afhankelijk van het te analyseren probleem kunnen sterkteparameters worden beïnvloed door zeer uiteenlopende factoren, zoals fabrikant, overheid, locatie, klimaat en tijd. De sterkte is zelden exact bekend en kan het beste worden gemodelleerd als een stochastische variabele. De kansverdeling van de sterkte wordt dikwijls bepaald aan de hand van proefresultaten. Het is echter niet verstandig om de keuze van het kansverdelings-type louter te baseren op het statistische materiaal. Het is belangrijk om te analyseren uit welke componenten de sterkte is opgebouwd. Zo zal bij een sterkte, die wordt bepaald door de som van een groot aantal variabelen, de keuze voor een normale verdeling voor de hand liggen. Wordt de sterkte daarentegen bepaald door het product van een aantal variabelen dan lijkt de lognormale verdeling een meer verantwoorde keuze. Als de sterkte wordt bepaald door het minimum van een groot aantal variabelen zal de keuze voor één van de asymptotische extreme waarde verdelingen gerechtvaardigd zijn. In bijlage E zijn enige veel toegepaste verdelingen voor sterkteparameters gegeven.
Evenals de sterkte is de belasting een ruim op te vatten begrip en kan het, afhankelijk van de aard van de risico-analyse, verschillende betekenissen hebben.

Cur frame Page 77 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Bij de analyse van het wel of niet werken van een stroomcircuit, dat is beveiligd door een smeltzekering, kan de gevraagde stroomsterkte worden gezien als de belasting. Deze is afhankelijk van het aantal aangesloten elektrische apparaten en het vermogen van deze apparaten. De sterkte is in dit geval de stroomsterkte, waarbij de draad van de zekering nog juist niet doorsmelt.
In de constructietechniek wordt onder belasting een kracht verstaan, die aangrijpt op de constructie. Deze kracht kan worden veroorzaakt door uiteenlopende verschijnselen, zoals bijvoorbeeld het gewicht van de constructie, natuurverschijnselen als wind, waterdruk en aardbevingen en menselijke activiteiten.
De grootte van de belastingen is doorgaans niet exact te voorspellen. Net als de sterkte is dan ook de belasting een stochastische variabele. De keuze van het type kansverdeling van de belasting is afhankelijk van de aard van de belasting.
In de constructietechniek is het gebruikelijk om belastingen te classificeren in een aantal categorieën. Hierbij spelen de factoren tijd en plaats een belangrijke rol. Deze classificatie is ook bruikbaar voor belastingen bij niet-constructieve problemen.
De eerste classificatie is een indeling naar de variatie van de belasting in de tijd. Hierbij worden drie categorieën onderscheiden, te weten: permanente belastingen, veranderlijke belastingen en bijzondere belastingen.
Onder permanente belastingen worden belastingen verstaan die langdurig aanwezig zijn en in de tijd niet of nauwelijks in grootte variëren.
Veranderlijke belastingen variëren in de tijd en kunnen ook gedurende een deel van de tijd afwezig zijn. Bij deze belastingen wordt daarom onderscheid gemaakt in de momentane waarde van de belasting op een bepaald tijdstip en de extreme waarde van de belasting in een bepaalde periode.
Bijzondere belastingen zijn belastingen, die met zeer kleine waarschijnlijkheid optreden binnen de levensduur van het object.
Een tweede indeling is te maken naar de variatie van de belasting in de ruimte. Onderscheiden worden plaatsgebonden en vrije belastingen. Bij plaatsgebonden belastingen ligt de ruimtelijke verdeling vast. Vrije belastingen kunnen binnen bepaalde grenzen een willekeurige verdeling over de ruimte hebben.
In de constructietechniek is verder nog een nadere verdeling van de belasting mogelijk, die is gebaseerd op de response van de constructie. Onderscheiden worden de statische en de dynamische belastingen. Belastingen zijn dynamisch als deze versnellingen in de constructie veroorzaken. Bij dynamische belastingen speelt naast de extreme waarde vaak vermoeiing een rol. Hierbij gaat het dan om de cumulatieve belasting gedurende een bepaalde periode. Op basis van de centrale limietstelling zal de cumulatieve belasting normaal verdeeld zijn.
Uit het voorgaande zal duidelijk zijn dat de kansverdeling van de belastingen afhankelijk is van de aard van de belastingen, de levensduur van het object en het te beschouwen mechanisme. In bijlage E zijn voor een aantal belastingen de vaak toegepaste verdelingstypen gegeven.

5.1.3 BEREKENINGSMETHODEN

De betrouwbaarheid van een element is afhankelijk van de marge tussen de weerstand tegen falen en de belastingen. De wijze waarop deze marge wordt berekend, kan per geval verschillen. In het constructieve vakgebied is een niveau-indeling van berekeningsmethoden voorgesteld door het „Joint committee on structural safety" [5.1]. Deze indeling bevat drie niveaus, te weten:

> niveau III: De niveau III methoden berekenen de faalkans, waarbij de kansdichtheidsfuncties van alle variabelen van de sterkte en de belastingen in aanmerking worden genomen. De betrouwbaarheid van een element wordt direct gekoppeld aan de faalkans.

Cur frame Page 78 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

> niveau II: Dit niveau omvat een aantal methoden voor het bepalen van de faalkans en daarmee van de betrouwbaarheid, waarbij de betrouwbaarheidsfunctie wordt gelineariseerd in een met zorg gekozen punt. Bij deze methoden wordt de kansverdeling van elke variabele benaderd door een standaard normale verdeling.

> niveau I: Op dit niveau wordt geen faalkans berekend. De niveau I berekening is een ontwerpmethode volgens de normen, waarbij een element voldoende betrouwbaar wordt geacht, als er een bepaalde marge aanwezig is tussen de representatieve waarden van de sterkte en de belastingen. Deze marge wordt geschapen door in het ontwerp rekening te houden met zogenoemde partiële veiligheidsfactoren.

In 5.2 en 5.3 wordt een aantal methoden voor het berekenen van de faalkans nader toegelicht. In 5.6 wordt nader ingegaan op de niveau I ontwerpmethode en hoe de partiële veiligheidsfactoren tot stand komen.

5.1.4 TIJDSAFHANKELIJKHEID

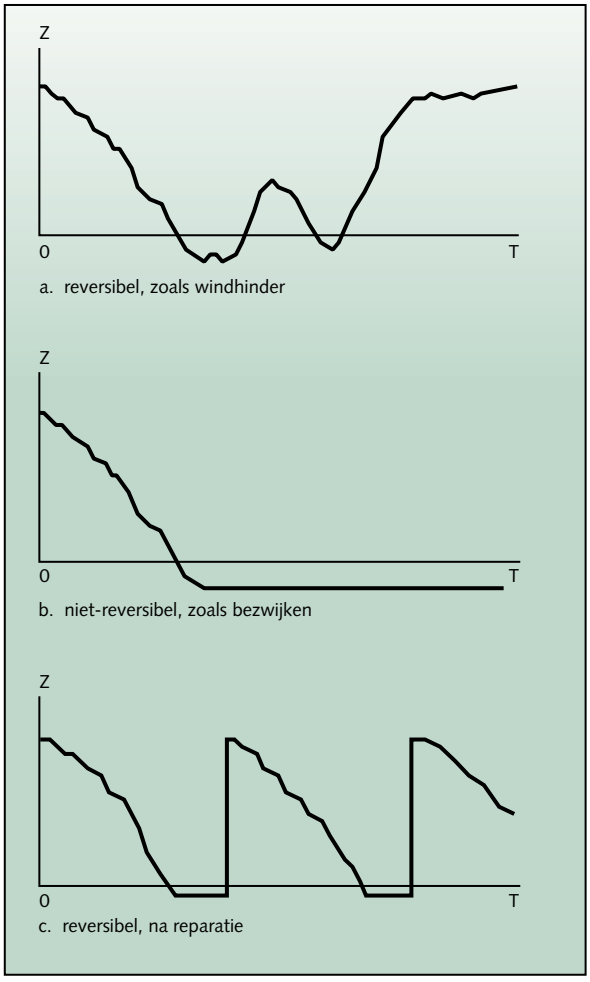
In de meeste gevallen vertonen sterkte, belasting en mogelijke andere parameters een verloop in de tijd. Deze tijdsafhankelijkheid kan grillig zijn of heel regelmatig, stochastisch, dan wel deterministisch bepaald. In het algemeen moet dus eigenlijk worden gesproken van stochastische processen in plaats van stochastische variabelen. Voorbeelden van tijdsafhankelijke processen zijn:

> fluctuaties van wind;
> vermoeiing van staal;
> consolidatie van grond;
> fluctuerende rentestand.

Bij het opstellen van de stochastische modellen voor deze processen moet met deze tijdmodellering rekening worden gehouden. Bekende termen in dit verband zijn Markov-processen, Gaussische processen en Poisson-processen. In veel gevallen zal het echter ook voldoende zijn de grootheid te beschrijven als een gewone functie van de tijd, waarin één of meer stochastische parameters voorkomen.
Het gevolg van voorgenoemde tijdsafhankelijkheid is dat ook de grenstoestandsfunctie Z een functie van de tijd is. Deze functie bevindt zich dan, als het goed is, het grootste deel van de tijd in het „functioneerdomein" en gedurende korte perioden in het „faaldomein". Een mogelijk verloop van Z als functie van de tijd is geschetst in figuur 5.2a. In dit voorbeeld gaat Z dus tweemaal gedurende het interval (0,T) het faaldomein binnen en keert ook tweemaal daar weer uit terug.
Of een verloop als in figuur 5.2a in werkelijkheid kan optreden, hangt van de omstandigheden af.
De „toestand Z < 0" kan bijvoorbeeld voor een flatgebouw een toestand van „hinderlijke windtrilling" aangeven. In dat geval faalt het gebouw inderdaad gedurende een korte tijd om later, als de storm gaat liggen, weer terug te keren in het „functioneerdomein". Dit is kenmerkend voor een zogenoemde reversibele grenstoestand.
Bij een irreversibele grenstoestand, zoals bezwijken, is een dergelijke situatie onmogelijk. Zodra Z door de nul-as gaat, treden er dermate dramatische veranderingen op dat de toestand niet meer te herstellen is in de oorspronkelijke. Hier geldt in feite: eenmaal gefaald, altijd gefaald. Het bijbehorende verloop van Z is gegeven in figuur 5.2b.
Voorts is er een tussenvorm denkbaar, namelijk die waarbij falen gevolgd wordt door reparatie. Als er sprake is van een merkbaar falen, kan deze reparatie direct worden uitgevoerd. Soms is er echter ook sprake van

Cur frame Page 79 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

zogenoemd niet-merkbaar falen. In dat geval is er eerst een inspectie nodig om het falen te ontdekken alvorens reparatie wordt uitgevoerd. Na de reparatie is de Z-functie dan direct weer duidelijk boven nul. Het verloop van een dergelijke Z-functie is gegeven in figuur 5.2c.

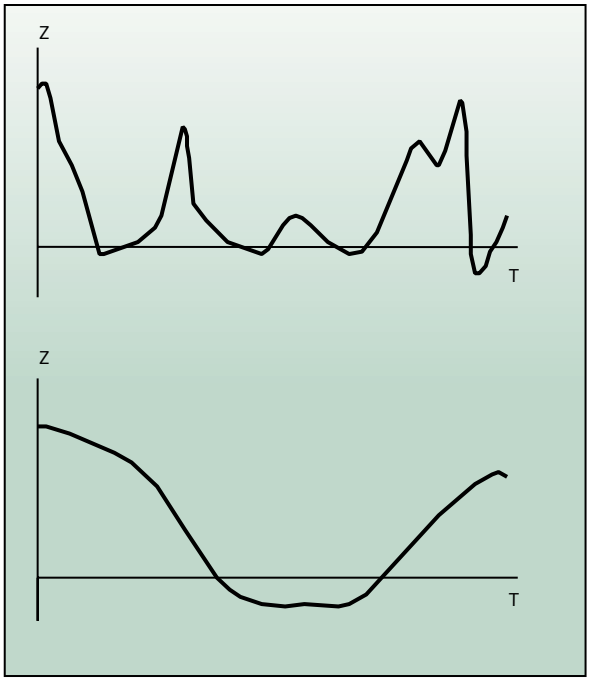


Figuur 5.2 *Typen van grenstoestanden.*

De impliciete aanname bij deze derde vorm van falen is dat er niet direct grote consequenties aan het falen zijn verbonden: het beschouwde element is onderdeel van een groter geheel en het uitvallen leidt er zonder meer niet toe dat het systeem als geheel faalt. Daarvoor moeten meer elementen in gefaalde toestand zijn of er moet zich een bijzondere toestand voordoen. Een voorbeeld is een brandmelder: als de brandmelder onklaar raakt en er tot het tijdstip dat dit wordt ontdekt geen brand uitbreekt, is er niets aan de hand. Om die reden wordt dan ook liever gesproken van „niet-beschikbaarheid" dan van „falen".
In alle voorgaande gevallen is het goed om onderscheid te maken tussen uitspraken die gelden voor een bepaald ogenblik en uitspraken die gelden voor een bepaalde periode.
Uitspraken voor een bepaald ogenblik betreffen de zogenoemde momentane waarden, in het Engels de „instanteneous values" of „arbitrary point in time values". Voor Z kan bijvoorbeeld de momentane kans op „falen" worden berekend voor een bepaald tijdstip. Dit is de ongeconditioneerde kans dat Z kleiner is dan nul

Cur frame Page 80 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

op dat tijdstip t. Als het proces „stationair en ergodisch" is, geldt dat deze kans direct overeenkomt met de in de tijd gemiddelde „niet-beschikbaarheid".
Voor veel toepassingen is het overigens ook van belang hoe de perioden met $Z < 0$ over de tijd zijn verdeeld. In figuur 5.3 zijn twee voorbeelden gegeven met dezelfde „niet-beschikbaarheid" of „relatieve faaltijd". In het eerste geval treedt het falen regelmatig op, maar duurt het iedere keer kort, in het tweede geval faalt de component weinig keren, maar de gefaalde toestand duurt relatief lang.



Figuur 5.3 *Twee processen met dezelfde relatieve faaltijd (niet-beschikbaarheid).*

Voor een gebeurtenis als „bezwijken" is de momentane faalkans niet van directe betekenis. Het is hooguit een tussenresultaat. Waar het uiteindelijk om gaat is de kans dat Z in een bepaalde periode (0,T), al is het maar één keer, kleiner wordt dan nul. Voor de faalkans is daarmee te schrijven:

$$P_f = P\Big(Z(t) > 0 \text{ en } Z(t+\Delta t) < 0\Big) \qquad \Big(\text{voor minstens één waarde van } t \in (0, T-\Delta t)\Big) \tag{5.4}$$

Soms kan het rekenkundig voordelen bieden van de volgende overigens gelijkwaardige formuleringen uit te gaan:

$$\begin{aligned} P_f &= P\Big(\min Z(t) < 0\Big) \qquad \Big(\text{voor alle waarden van } t \in (0, T)\Big) \\ P_f &= 1 - P\Big(Z(t) > 0\Big) \qquad \Big(\text{voor alle waarden van } t \in (0, T)\Big) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Ten slotte nog een opmerking over de berekeningsmethoden. In veel gevallen kan, zoals ook eerder al is opgemerkt, het tijdsafhankelijke karakter van de variabelen worden gemodelleerd via een gewone tijdsfunctie

Cur frame Page 81 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

met random parameters. Als dit zo is, kan bij de berekening gebruik worden gemaakt van de berekeningstechnieken van tijdsonafhankelijke problemen. Als echter expliciet gebruikt wordt gemaakt van de formulering via stochastische processen zijn aanvullende rekenmethoden nodig. In 5.5 wordt hierop verder ingegaan.

5.2 NIVEAU III METHODEN

5.2.1 FUNDAMENTELE OPLOSSING

De basis van de niveau III faalkansberekening is de wiskundige formulering van de deelverzameling van de kansruimte, waarbij sprake is van falen volgens vergelijking (5.1).
Als de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie $f_{R,S}(R, S)$ van de sterkte R en de belasting S bekend is, kan door integratie de faalkans worden berekend (zie ook fig. 5.4):

$$P_f = \int\limits_{Z<0}\int f_{R,S}(R,S)\,dR\,dS \tag{5.6}$$

Omdat $Z < 0$ als $R < S$ geldt:

$$P_f = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{S} f_{R,S}(R,S)\,dR\,dS \tag{5.7}$$

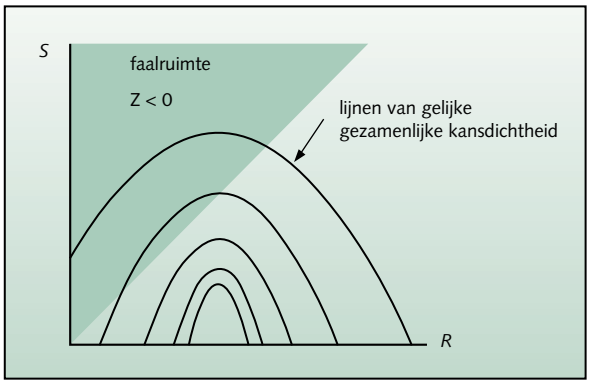
Als de sterkte en de belasting stochastisch onafhankelijk zijn, geldt:

$$P_f = P(R < S) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{S} f_R(R) f_S(S)\,dR\right)dS = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_R(S) f_S(S)\,dS \tag{5.8}$$

Op gelijke wijze kan worden aangetoond dat:

$$P_f = P(S > R) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(1 - F_S(R)\Big) f_R(R)\,dR \tag{5.9}$$

Deze integraal staat bekend als de convolutie-integraal.



Figuur 5.4 *Gebied waarover de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie $f_{R,S}(R,S)$ moet worden geïntegreerd.*

Cur frame Page 82 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Meestal zullen de sterkte en de belasting functies zijn van één of meer stochastische variabelen. In zo'n geval is de betrouwbaarheidsfunctie te schrijven als:

$$Z = g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{5.10}$$

De faalkans wordt dan berekend met de integraal:

$$P_f = \iint\limits_{Z<0} \ldots \int f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) dX_1 dX_2 \ldots dX_n \tag{5.11}$$

Als de variabelen X_1, X_2, ..., X_n stochastisch onafhankelijk zijn, vereenvoudigt de vergelijking tot:

$$P_f = \iint\limits_{Z<0} \ldots \int f_{X_1}(X_1) f_{X_2}(X_2) \ldots f_{X_n}(X_n) dX_1 dX_2 \ldots dX_n \tag{5.12}$$

Deze integraal kan zelden analytisch worden bepaald. De oplossing zal dus meestal met numerieke methoden worden berekend. In de volgende paragrafen worden twee van deze, in essentie verschillende, numerieke methoden toegelicht. Deze methoden zijn de numerieke integratie en de oplossing door simulatie met de Monte Carlo methode.

5.2.2 NUMERIEKE INTEGRATIE

Vergelijking (5.11) is te schrijven als:

$$\begin{aligned} P_f &= \int\limits_{Z<0} dF_{\vec{X}}(\vec{X}) = \int\limits_0^1 \mathbf{1}(Z) dF_{\vec{X}}(\vec{X}) = \\ &= \int\limits_0^1 \ldots \iint\limits_{00}^{11} \mathbf{1}(Z)\ dF_{X_1}(X_1)\ dF_{X_2|X_1}(X_2|X_1) \ldots dF_{X_n|X_{n-1}, \ldots, X_1}(X_n|X_{n-1}, \ldots, X_1) \end{aligned} \tag{5.13}$$

waarin:

$dF_{\vec{X}}(\vec{X}) = f_{\vec{X}}(\vec{X}) dX_1 dX_2 \ldots dX_n$

$\mathbf{1}(Z)$ is de indicatorfunctie:

$\mathbf{1}(Z) = 1$, als $Z < 0$;

$\mathbf{1}(Z) = 0$, als $Z \geq 0$.

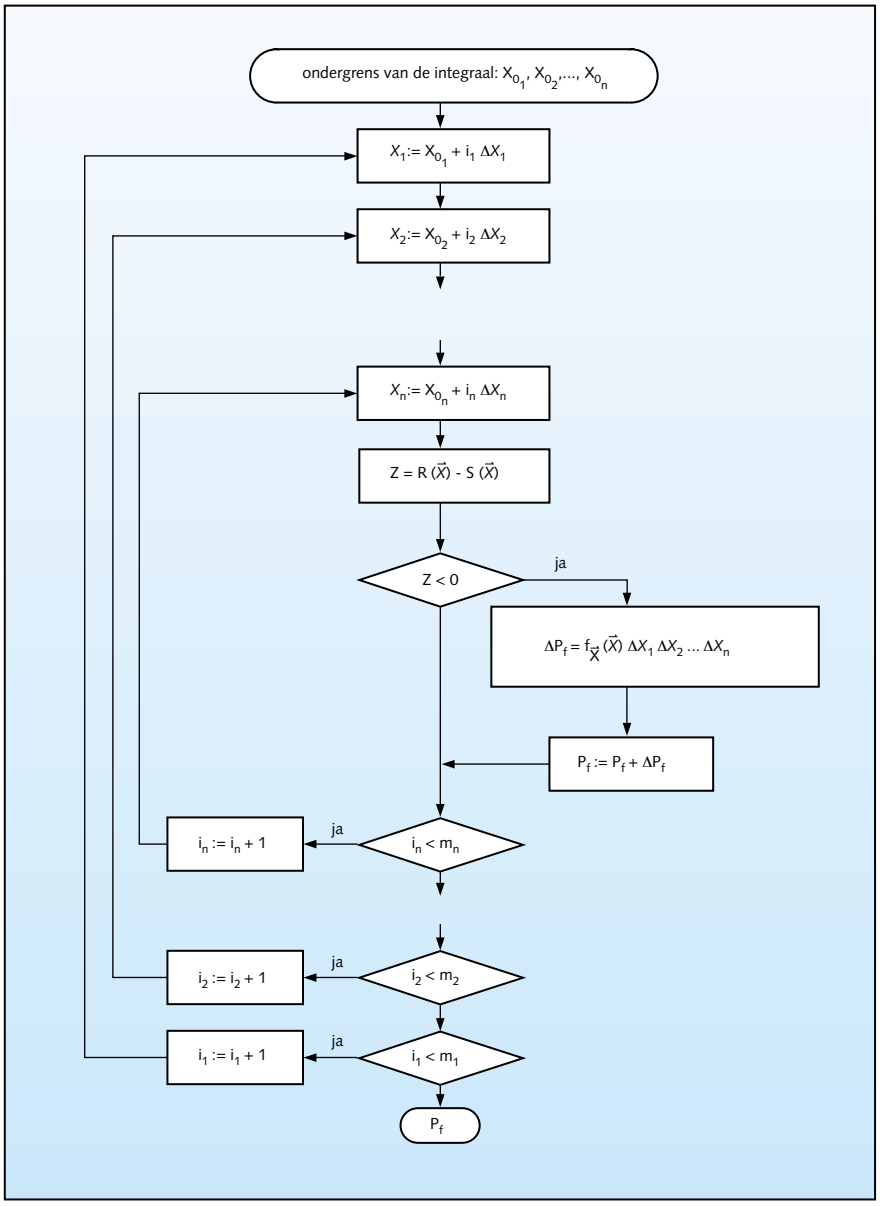
Als de basisvariabelen X_i van de stochastische vector $\vec{X}$ onafhankelijk zijn, geldt:

$$P_f = \int\limits_0^1 \ldots \iint\limits_{00}^{11} \mathbf{1}(Z)\ dF_{X_1}(X_1)\ dF_{X_2}(X_2) \ldots dF_{X_n}(X_n) \tag{5.14}$$

Voor het oplossen van de vergelijkingen (5.13) en (5.14) zijn er diverse numerieke integratiemethoden beschikbaar. Omdat het gebied, waarover moet worden geïntegreerd, is begrensd door 0 en 1, kunnen ook de zeer efficiënte numerieke methoden voor integratie van n-dimensionale hypercubes worden toegepast. Voor de theorie en de procedures van deze methoden wordt verwezen naar [5.2].

Cur frame Page 83 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Een eenvoudige methode van numerieke integratie is die volgens de Riemann-procedure. Het stroomschema van de Riemann-procedure is weergegeven in figuur 5.5.



Figuur 5.5 *Stroomschema van de Riemann-procedure.*

Met deze procedure wordt de faalkans benaderd door:

$$P_f \approx \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \ldots \sum_{i_n=0}^{m_n} 1(Z) f_{\vec{X}}(\vec{X}_0 + i_1 \Delta X_1 + i_2 \Delta X_2 + \ldots + i_n \Delta X_n) \Delta X_1 \Delta X_2 \ldots \Delta X_n \qquad (5.15)$$

Cur frame Page 84 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

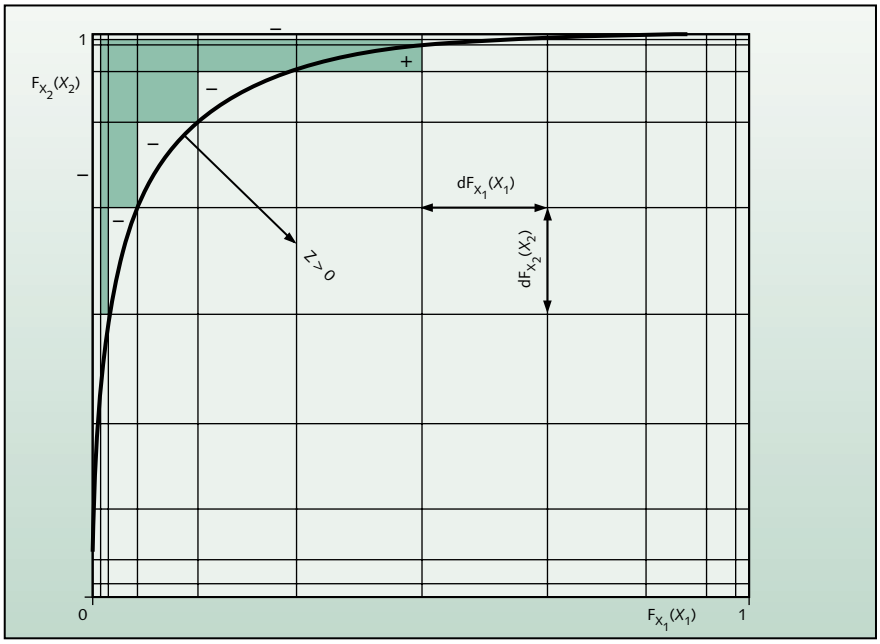
Voor het verkrijgen van een betrouwbare schatting van de faalkans moeten de integratiestappen ΔX_j voldoende klein zijn. Het aantal integratiestappen m_j is naast de grootte van de stap ΔX_j ook afhankelijk van het domein, waarop de variabele X_j is gedefinieerd. In het schema van figuur 5.5 is het domein $X_j \in [X_{0j}, X_{0j} + m_j \Delta X_j]$. De keuze van het domein is van belang voor de nauwkeurigheid van de berekende faalkans.

In totaal moet de berekeningslus $\prod_{j=1}^{n} m_j$ maal worden doorgelopen.

Bij een groot aantal stochastische variabelen in de betrouwbaarheidsfunctie zal het aantal berekeningen zeer groot zijn.

In de Riemann-procedure wordt de stapgrootte ΔX_i constant gehouden. Dit betekent dat $dF_{\vec{X}}(\vec{X})$ variabel is. In de gebieden met een kleine kansdichtheid is de stapgrootte $dF_{\vec{X}}(\vec{X})$ kleiner dan in de gebieden met een grote kansdichtheid. In figuur 5.6 is dit afgebeeld in het $F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2)$-vlak voor het geval met twee basisvariabelen X_1 en X_2. Het oppervlak van het gearceerde gebied is de met de Riemann-procedure berekende faalkans.

In figuur 5.6 zijn de oppervlakken, die te veel in rekening zijn gebracht, aangegeven met een plus. De oppervlakken die wel tot het onveilige gebied behoren, maar niet zijn meegerekend, zijn aangegeven met een min. Deze met een plus of een min aangegeven gebieden vormen tezamen de absolute fout in de berekende faalkans.



Figuur 5.6 *Nauwkeurigheid van de Riemann-procedure.*

De niet meegerekende oppervlakken aan de randen van de figuur worden bepaald door de keuze van het domein. Verder blijkt uit figuur 5.6 dat de fout, die wordt gemaakt met de Riemann-procedure, niet alleen afhankelijk is van de stapgrootten ΔX_i en de keuze van het domein, maar ook van de vorm en de locatie van het faalgebied in het $F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2)$-vlak.

Cur frame Page 85 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Verbetering van de nauwkeurigheid van de numerieke integratie kan worden verkregen door $dF_{X_1}(X_1)$ en $dF_{X_2}(X_2)$ te kiezen als integratievariabelen, zodat het integratiegebied gelijk kan worden gesteld met het gebied waarop $F_{X_1}(X_1)$ en $F_{X_2}(X_2)$ zijn gedefinieerd.

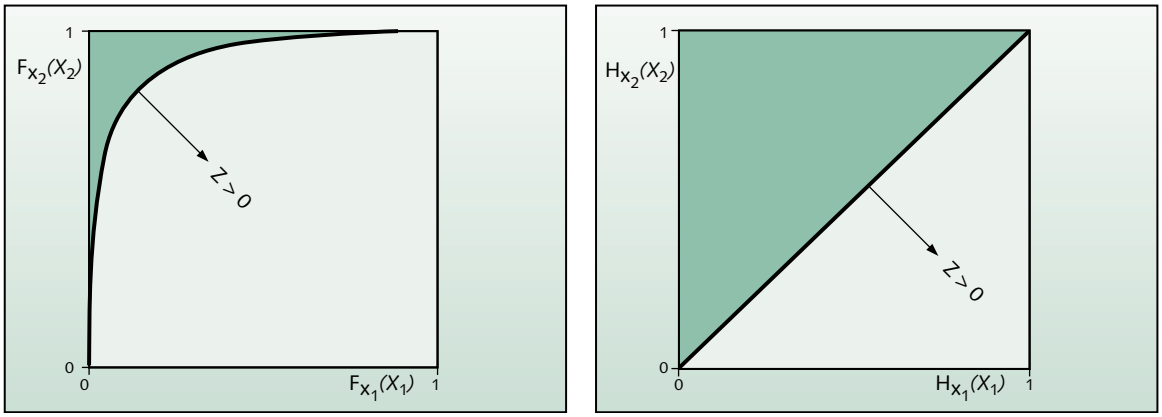
Bij het berekenen van kleine faalkansen is het faalgebied relatief klein ten opzichte van het totale integratiegebied. Door het faalgebied kunstmatig te vergroten, kan de efficiëntie, gedefinieerd als de nauwkeurigheid als functie van de integratiestapgrootte, worden verbeterd. De berekende faalkans zal dan echter ook groter zijn dan de werkelijke faalkans. Dit probleem kan worden ondervangen door bij elke integratiestap een correctie toe te passen, die omgekeerd evenredig is met de kunstmatige vergroting van het faalgebied. Deze methode staat bekend als „Importance Sampling".
De wiskundige formulering van Importance Sampling is:

$$P_f = \int_0^1 \cdots \int_0^1 1(Z) \frac{f_{\vec{X}}(\vec{X})}{h_{\vec{X}}(\vec{X})} dH_{X_1}(X_1) dH_{X_2|X_1}(X_2|X_1) \cdots dH_{X_n|X_{n-1}\cdots X_1}(X_n|X_{n-1}\cdots X_1) \tag{5.16}$$

waarin:

$f_{\vec{X}}(\vec{X})$ is de oorspronkelijke gezamenlijke kansdichtheidsfunctie;
$h_{\vec{X}}(\vec{X})$ is de gezamenlijke Importance Sampling kansdichtheidsfunctie;
$H_{\vec{X}}(\vec{X})$ is de gezamenlijke Importance Sampling kansverdelingsfunctie.

In figuur 5.7 is aangegeven hoe de faalruimte verandert ten opzichte van het totale integratiegebied als gevolg van Importance Sampling.



Figuur 5.7 *Vergroting van het faalgebied ten opzichte van het integratiegebied.*

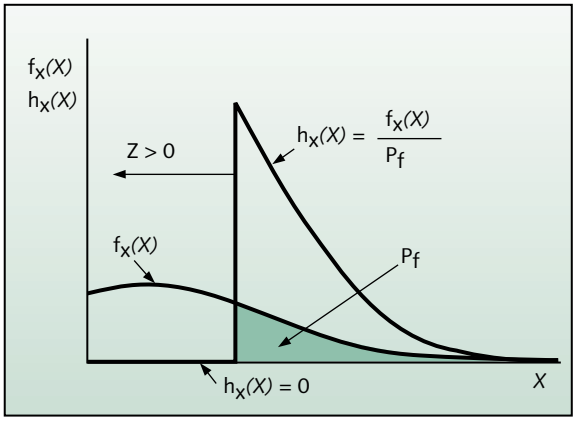
De meest eenvoudige numerieke oplossing van vergelijking (5.16) voor een probleem met twee onafhankelijke basisvariabelen is:

$$P_f = \sum_{H_{X_2}(X_2)=0}^{1} \sum_{H_{X_1}(X_1)=0}^{1} 1(Z) \frac{f_{\vec{X}}(\vec{X})}{h_{\vec{X}}(\vec{X})} \Delta H_{X_1}(X_1) \Delta H_{X_2}(X_2) \tag{5.17}$$

Cur frame Page 86 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De stapgrootten $\Delta H_{X_1}(X_1)$ en $\Delta H_{X_2}(X_2)$ zijn van groot belang voor de nauwkeurigheid en de snelheid van de oplossing. Het is het meest efficiënt als de stapgrootte klein wordt gekozen in de buurt van de grens van de faalruimte en voor de rest van het integratiegebied zo groot mogelijk wordt aangehouden. Dit kan door het totale integratiegebied onder te verdelen in subgebieden, waarin verschillende integratiestappen worden toegepast. De stapgrootte in een subgebied wordt iteratief bepaald. In de literatuur is deze methode bekend als „Adaptive Numerical Integration".

Het toepassen van Importance Sampling in combinatie met numerieke integratie volgens de Riemann-procedure is niet gewenst, omdat bij gelijkblijvende ΔX_i de stapgrootte $\Delta H_{X_i}(X_i)$ klein is in de staart van de Importance Sampling verdeling, maar over het algemeen juist groot is ter plaatse van de faalgrens in het middengebied. Toepassen van Importance Sampling en de Riemann-procedure zal leiden tot een grotere onnauwkeurigheid.
De keuze van de Importance Sampling kansdichtheidsfunctie zal afhangen van de vorm van de faalruimte. De meest efficiënte functie is een kansdichtheidsfunctie, die in het faalgebied gelijk is aan de oorspronkelijke kansdichtheidsfunctie gedeeld door de faalkans en in het veilige gebied gelijk is aan nul. Dit houdt in dat er alleen wordt geïntegreerd over het faalgebied. Voor een probleem met één basisvariabele is dit weergegeven in figuur 5.8.



Figuur 5.8 *Optimale Importance Sampling kansdichtheidsfunctie.*

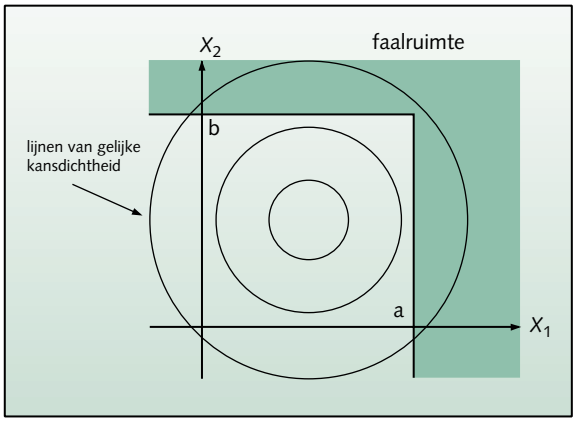
Het probleem is echter dat vooraf de faalkans niet exact bekend is. Daarom worden in de praktijk verschillende soorten kansdichtheidsfuncties toegepast, zoals bijvoorbeeld de multidimensionale normale kans-dichtheidsfunctie. Bij het toepassen van dergelijke verdelingen voor Importance Sampling wordt doorgaans de verwachtingswaarde in het onveilige gebied gekozen in de nabijheid van het ontwerppunt. Als de faalkans niet overwegend wordt bepaald door het gebied rondom het ontwerppunt, zal met een dergelijke Importance Sampling de faalkans worden onderschat. Dit kan worden gedemonstreerd aan de hand van een voorbeeld met twee variabelen, waarbij de faalruimte wordt gegeven door:

$$\text{falen als: } X_1 > a \text{ of } X_2 > b \tag{5.18}$$

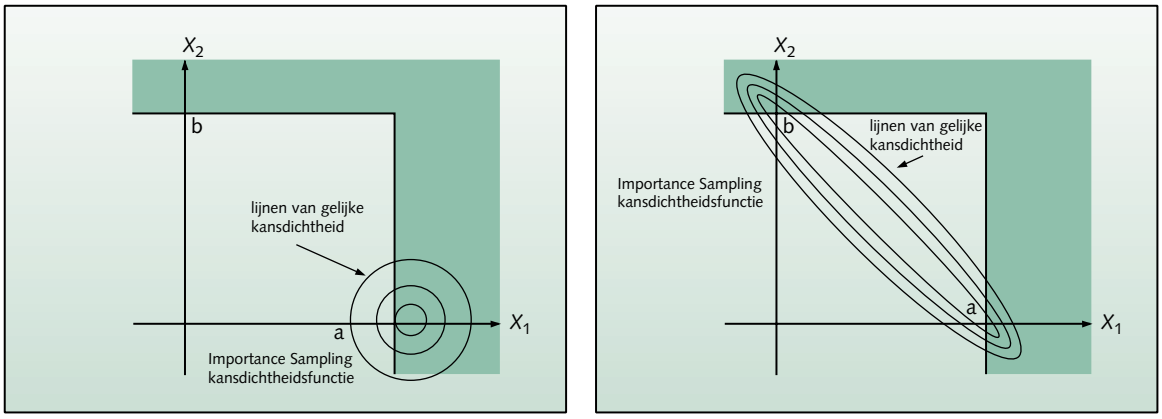
In figuur 5.9 is de faalruimte aangegeven in het X_1,X_2-vlak met daarin de lijnen met gelijke kansdichtheid van de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie. Door Importance Sampling met een kansdichtheidsfunctie die is

Cur frame Page 87 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

verschoven in de richting van één van de ontwerppunten zal de nauwkeurige integratie overwegend plaatshebben in een deel van de oorspronkelijke faalruimte en wordt de faalkans onderschat. In zo'n geval is het toepassen van een gecorreleerde tweedimensionale normale kansdichtheidsfunctie wel succesvol (zie fig. 5.10).
Voor meer informatie over het toepassen van deze methode wordt verwezen naar [5.3].



Figuur 5.9 *Faalruimte en lijnen van gelijke kansdichtheid.*



Figuur 5.10 *Importance Sampling.*

5.2.3 MONTE CARLO METHODE

De Monte Carlo methode maakt gebruik van de mogelijkheid om randomgetallen te trekken uit een uniforme kansdichtheidsfunctie tussen nul en één. Nagenoeg alle programmeertalen hebben hiervoor een standaard procedure.

De onderschrijdingskans van een willekeurige stochastische variabele is uniform verdeeld tussen nul en één, ongeacht de verdeling van de variabele. In formulevorm:

$$F_X(X) = X_u \tag{5.19}$$

Cur frame Page 88 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

waarin:

X_u is de uniform verdeelde variabele tussen nul en één;
$F_X(X)$ is de onderschrijdingskans $P(X < X)$.

Voor de variabele X geldt dus:

$$X = F_X^{-1}(X_u) \tag{5.20}$$

waarin:

$F_X^{-1}(X_u)$ is de inverse van de kansverdelingsfunctie van X.

Met behulp van deze formule kan door middel van het trekken van een getal X_u uit de uniforme verdeling tussen nul en één een randomgetal X worden gegenereerd uit een willekeurige verdeling $F_X(X)$.
Deze wijze van trekken van randomgetallen is algemeen toepasbaar. Bij verdelingen, waarvan de inverse kansverdelingsfunctie $F_X^{-1}(X_u)$ niet analytisch bekend is, kan deze methode echter leiden tot veel iteratief rekenwerk. Voor het trekken uit bijvoorbeeld een normale verdeling is derhalve gezocht naar andere, minder rekenintensieve, methoden (zie bijlage F).
Op min of meer dezelfde wijze kunnen de basisvariabelen van een stochastische vector worden getrokken uit een bekende gezamenlijke kansverdelingsfunctie. De gezamenlijke kansverdelingsfunctie moet dan echter wel worden geformuleerd als het product van de voorwaardelijke kansverdelingen van de basisvariabelen van de vector. In formulevorm is dit:

$$F_{\vec{X}}(\vec{X}) = F_{X_1}(X_1) \cdot F_{X_2|X_1}(X_2|X_1) \ldots F_{X_m|X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}}(X_m|X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}) \tag{5.21}$$

Door nu m trekkingen te doen uit de uniforme kansverdeling tussen nul en één, kan voor elke X_i een waarde worden bepaald met:

$$\begin{aligned} X_1 &= F_{X_1}^{-1}(X_{u_1}) \\ X_2 &= F_{X_2|X_1}^{-1}(X_{u_2}|X_1) \\ &\vdots \\ X_m &= F_{X_m|X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}}^{-1}(X_{u_m}|X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}) \end{aligned} \tag{5.22}$$

Als de basisvariabelen stochastisch onafhankelijk zijn, vereenvoudigt dit tot:

$$X_i = F_{X_i}^{-1}(X_{u_i}) \tag{5.23}$$

Cur frame Page 89 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Dit komt overeen met vergelijking (5.19). Voor de verkregen vector (X_1, X_2, ..., X_m) wordt nagegaan of deze in de faalruimte of in het veilige gebied ligt door de waarden in te vullen in de betrouwbaarheidsfunctie(s).

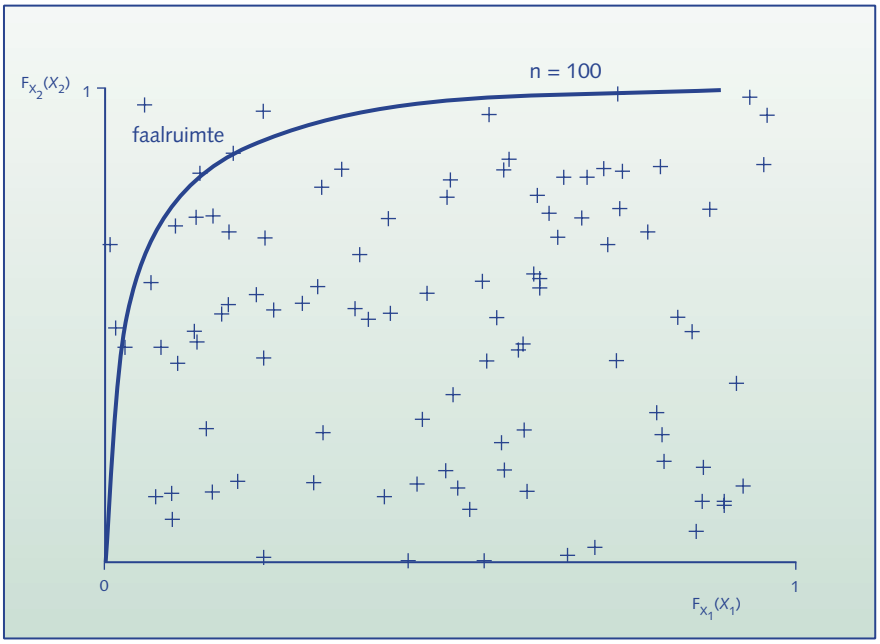
Door deze procedure een groot aantal malen te herhalen kan de faalkans worden geschat met:

$$P_f \approx \frac{n_f}{n} \tag{5.24}$$

waarin:

- n is het totale aantal simulaties (n · m trekkingen uit de uniforme verdeling, waarin m is het aantal basisvariabelen);
- n_f is het aantal simulaties, waarbij $Z < 0$.

In figuur 5.11 zijn honderd simulaties van een tweedimensionale stochastische vector uitgezet in het $F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2)$-vlak. Dit vlak komt overeen met het integratiegebied van figuur 5.6. Uit de figuur blijkt dat zes trekkingen in het faalgebied liggen. Een schatting van de faalkans is $P_f = 0{,}06$.



Figuur 5.11 *Monte Carlo simulatie.*

Cur frame Page 90 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De relatieve fout die wordt gemaakt met de simulatie is:

$$\varepsilon = \frac{\frac{n_f}{n} - P_f}{P_f} \tag{5.25}$$

De verwachtingswaarde van de relatieve fout is nul, de standaardafwijking bedraagt:

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{1 - P_f}{nP_f}} \tag{5.26}$$

Bij voldoende grote n is de fout, op grond van de centrale limietstelling, normaal verdeeld. De kans dat de relatieve fout kleiner is dan een gegeven waarde E is dan:

$$P(\varepsilon < E) = \Phi\left(\frac{E}{\sigma_\varepsilon}\right) \tag{5.27}$$

Hieruit volgt dus dat met een betrouwbaarheid van $\Phi(k)$ de relatieve fout kleiner is dan $E = k\sigma_\varepsilon$. Bij een gewenste k en E kan het aantal benodigde simulaties n worden bepaald met:

$$n > \frac{k^2}{E^2}\left(\frac{1}{P_f} - 1\right) \tag{5.28}$$

Als bijvoorbeeld 95 % betrouwbaarheid wordt geëist aan een relatieve fout van maximaal E = 0,1, dan bedraagt het aantal benodigde simulaties:

$$n > 400\left(\frac{1}{P_f} - 1\right) \tag{5.29}$$

Het aantal simulaties is dus nog afhankelijk van de faalkans. Bij kleine faalkansen is het aantal benodigde simulaties zeer hoog.
In het geval van het voorbeeld van figuur 5.11 zijn volgens vergelijking (5.29) circa 6300 trekkingen gewenst.

Ten einde het grote aantal berekeningen te reduceren, wordt vaak een benaderingsmethode toegepast voor het schatten van de kansverdeling van de betrouwbaarheidsfunctie. Met de gesimuleerde gegevens wordt met een methode voor het schatten van verdelingen (zie hoofdstuk 2) de kansverdeling van de betrouwbaarheidsfunctie geschat. Met de gevonden verdeling kan vervolgens de faalkans worden geschat. Deze methode geeft wel op een snelle wijze inzicht in de vorm van de kansverdeling van de betrouwbaarheidsfunctie, maar is over het algemeen te onnauwkeurig voor het schatten van de faalkans. Een methode om met voldoende nauwkeurigheid het aantal simulaties te beperken, is het toepassen van Importance Sampling. Zoals uit figuur 5.7 blijkt, neemt bij Importance Sampling de faalruimte toe ten opzichte van de totale integratieruimte. Als de randomgetallen worden getrokken uit de Importance Sampling kansverdelingsfunctie, in plaats van uit de oorspronkelijke kansverdeling, zullen dus meer punten worden gevonden in het faalgebied.

Cur frame Page 91 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Als vergelijking (5.24) wordt toegepast, zal de schatting van de faalkans niet juist zijn. Bij toepassing van Importance Sampling is de faalkans te benaderen met:

$$P_f = \frac{\sum_{i=1}^{n} 1(Z)\frac{f_{\vec{X}_i}(\vec{X}_i)}{h_{\vec{X}_i}(\vec{X}_i)}}{n} \qquad (5.30)$$

waarin:

$\vec{X}_i$ is de vector met randomgetallen, getrokken uit de Importance Sampling kansverdeling;
$f_{\vec{X}_i}(\vec{X}_i)$ is de waarde van de oorspronkelijke kansdichtheidsfunctie voor de vector $\vec{X}_i$;
$h_{\vec{X}_i}(\vec{X}_i)$ is de waarde van de Importance Sampling kansdichtheidsfunctie voor de vector $\vec{X}_i$;
n is het totale aantal trekkingen.

In figuur 5.12 is het stroomschema van de Monte Carlo simulatie met Importance Sampling gegeven. Bij vergroting van de faalruimte ten opzichte van de totale ruimte, waaruit de variabelen random worden getrokken, met een factor 100 reduceert het aantal benodigde simulaties ook met de factor 100 (zie vergelijking (5.29)).

Bij de keuze van de Importance Sampling kansverdeling geldt hetzelfde als bij de toepassing in de numerieke integratie (zie ook 5.2.2).
Voor het geval van een ééndimensionaal probleem heeft Bucher [5.4] de parameters van de optimale normale Importance Sampling kansverdeling bepaald. Deze zijn:

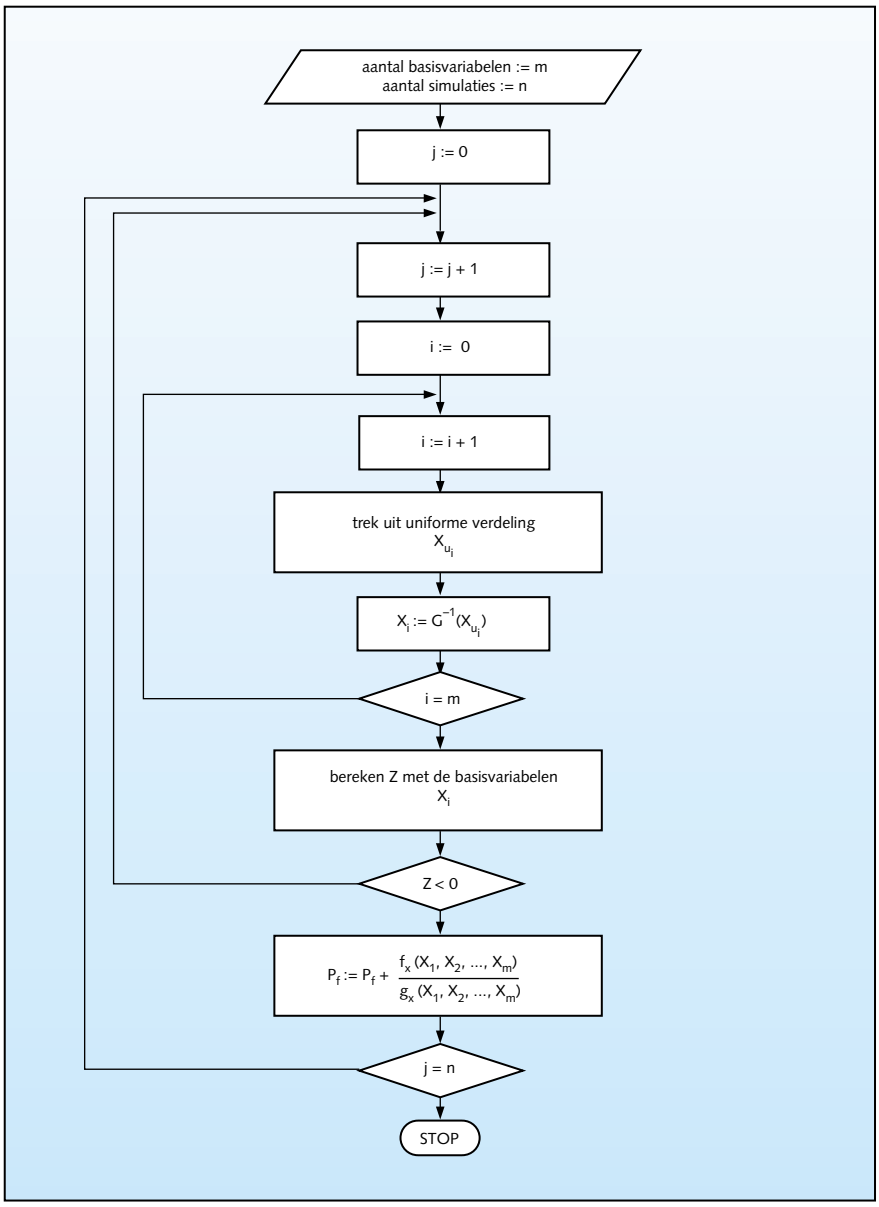
$$\mu_{h_x} = \frac{\exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\,\Phi(-\beta)} \qquad \text{en} \qquad \sigma_{h_x} = \sqrt{1 + \beta\mu_{h_x} - \mu_{h_x}^2} \qquad (5.31)$$

waarin:

$\beta = \Phi^{-1}(P_f)$.

De grootte van de faalkans P_f is op voorhand niet bekend. De berekening van de faalkans gebeurt iteratief, waarbij de Importance Sampling kansverdeling na elke iteratieslag opnieuw wordt bepaald.
Bij Importance Sampling met de vergelijkingen (5.31) wordt getrokken uit een verdeling die is verschoven naar het ontwerppunt. Als de faalruimte wordt gedefinieerd door meer dan één stochastische variabele, dan is het mogelijk dat de faalruimte niet geconcentreerd rond een ontwerppunt ligt (zie fig. 5.10). Dit is zeker het geval als de definitie van de faalruimte discontinu is.
Importance Sampling met de vergelijkingen (5.31) voor één van de variabelen zal in een dergelijk geval leiden tot onderschatting van de faalkans. In dergelijke gevallen kan een methode worden toegepast, die bekend staat als Adaptive Sampling. Bij Adaptive Sampling wordt als eerste voor elke variabele de voorwaardelijke faalkans berekend, waarbij de overige variabelen worden gelijkgesteld aan hun verwachtingswaarden. De faalkans wordt bepaald door simulatie van de betreffende variabele. De overige variabelen worden constant gehouden. Met de voorwaardelijke faalkansen kan met de vergelijkingen (5.31) de verwachtingswaarde van de voorwaardelijke Importance Sampling functie worden bepaald.

Cur frame Page 92 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 5.12 *Monte Carlo simulatie met Importance Sampling.*

De verwachtingswaarde van de gezamenlijke Importance Sampling functie wordt berekend met:

$$\mu_{g(X_i)} = \frac{\mu_{h(X_i)} P_{f_i}}{\sum_{i=1}^{n} P_{f_i}} \qquad (5.32)$$

waarin:

$\mu_{g(X_i)}$ is de verwachtingswaarde van de gezamenlijke Importance Sampling functie;
$\mu_{h(X_i)}$ is de verwachtingswaarde van de voorwaardelijke Importance Sampling functie volgens vergelijking (5.31) met faalkans $P_f = P_{fi}$;

Cur frame Page 93 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

P_{f_i} is de voorwaardelijke faalkans, waarbij alle $\{X_j | j \neq i\}$ gelijk zijn aan hun verwachtingswaarde.

Rond het punt $\mu_{g(\vec{X})}$ worden op dezelfde wijze als bij het berekenen van P_{f_i}, punten gesimuleerd in de faalruimte. Van deze punten worden de varianties en covarianties bepaald met bekend gemiddelde $\mu_{g(X_i)}$. De covariantiematrix wordt vervolgens gediagonaliseerd en de variabelen getransformeerd met behulp van de techniek uit 2.3. Bij de transformatie worden de eigenwaarden van de covariantiematrix aangepast volgens:

$$\lambda_i^* = \sigma_\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + (1 - \sigma_e \lambda_i) \tag{5.33}$$

waarin:

λ_i is de berekende eigenwaarde van de covariantiematrix;

$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\dfrac{1 - P_f}{n P_f}}$.

Met de getransformeerde variabelen wordt de faalkans bepaald met de bijpassende Importance Sampling functie. Na het bepalen van de faalkans kan de Importance Sampling functie worden aangepast. Deze methode is geschikt voor verwerking in een computerprogramma, maar minder goed voor het toepassen in combinatie met algemene programma`s voor Monte Carlo Simulatie. Voor verdere toepassing van Adaptive Sampling wordt verwezen naar [5.4].

5.2.4 BEPALING VAN HET ONTWERPPUNT BIJ FAALKANSBEREKENING MET NIVEAU III METHODEN

In 5.1.1 is het ontwerppunt gedefinieerd als het punt in de faalruimte met de grootste gezamenlijke kansdichtheid. Dit punt kan zowel bij numerieke integratie als bij simulatie worden gevonden door van elk punt in de iteratie of van elk gesimuleerd punt de kansdichtheid te bepalen. Door het punt met de grootste kansdichtheid te onthouden, kan het ontwerppunt worden bepaald. Uiteraard zijn er nog veel meer geavanceerde methoden voor het vinden van maxima beschikbaar. Voor deze methoden wordt verwezen naar de handboeken voor numerieke methoden.

5.3 NIVEAU II METHODEN

5.3.1 INLEIDING NIVEAU II METHODEN

In het geval de betrouwbaarheidsfunctie lineair is, kunnen de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van deze functie worden berekend met:

$$\begin{aligned} Z &= a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n + b \\ \mu_z &= a_1 \mu_{x_1} + a_2 \mu_{x_2} + \ldots + a_n \mu_{x_n} + b \\ \sigma_Z &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)} \end{aligned} \tag{5.34}$$

Cur frame Page 94 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Als de basisvariabelen X_1, X_2, ..., X_n normaal verdeeld zijn, is Z ook normaal verdeeld. De kans dat $Z < 0$ is, kan dan worden berekend met behulp van de standaard normale verdeling (zie ook bijlage B):

$$P(Z<0) = \Phi\left(\frac{0-\mu_z}{\sigma_z}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu_z}{\sigma_z}\right) \tag{5.35}$$

Voor een lineaire betrouwbaarheidsfunctie met normaal verdeelde basisvariabelen is het dus betrekkelijk eenvoudig om de faalkans uit te rekenen.
Het quotiënt van de gemiddelde waarde en de standaardafwijking van de betrouwbaarheidsfunctie wordt ook wel aangeduid als de betrouwbaarheidsindex:

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} \tag{5.36}$$

Als de basisvariabelen normaal verdeeld en stochastisch onafhankelijk zijn, kunnen deze in de betrouwbaarheidsfunctie worden getransformeerd naar standaard normaal verdeelde variabelen met:

$$U_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \tag{5.37}$$

De wijze waarop de betrouwbaarheidsfunctie door deze transformatie verandert, is het beste te illustreren met behulp van de eenvoudige functie $Z = R - S$. De variabelen R en S worden getransformeerd naar de standaard normale variabelen U_1 en U_2. De betrouwbaarheidsfunctie verandert dan in:

$$\begin{aligned} Z &= (\mu_R + \sigma_R U_1) - (\mu_S + \sigma_S U_2) \\ &= \sigma_R U_1 - \sigma_S U_2 + \mu_R - \mu_S \end{aligned} \tag{5.38}$$

De faalruimte in het U_1,U_2-vlak is gedefinieerd als (zie fig. 5.13):

$$\sigma_R U_1 - \sigma_S U_2 + \mu_R - \mu_S \le 0 \tag{5.39}$$

De loodlijn op de rand van de faalruimte door het nulpunt wordt beschreven door:

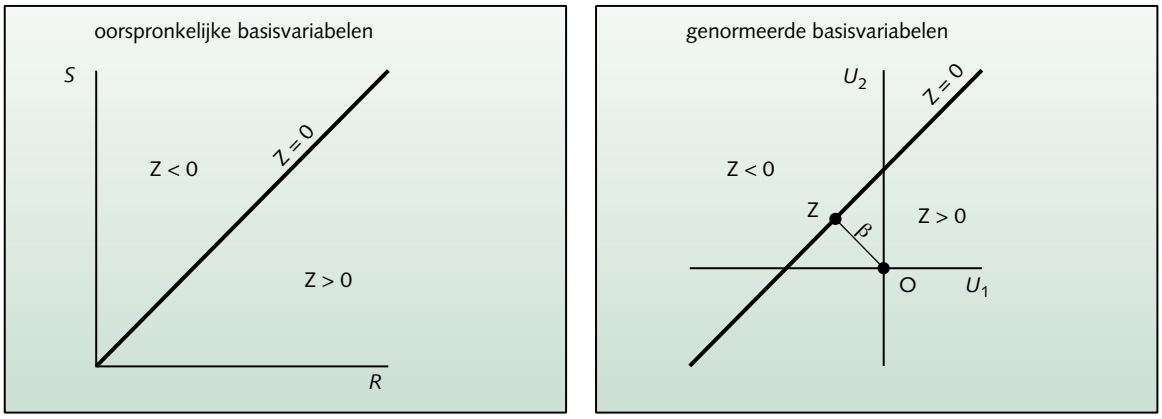
$$\sigma_S U_1 + \sigma_R U_2 = 0 \tag{5.40}$$

De afstand van de oorsprong tot de faalruimte langs deze lijn is:

$$OA = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \tag{5.41}$$

Dit is precies de definitie van β. De betrouwbaarheidsindex is dus de afstand vanuit de oorsprong tot de faalruimte, die wordt beschreven door een lineaire betrouwbaarheidsfunctie. Deze definitie staat bekend als de betrouwbaarheidsindex volgens HASOFER en LIND [5.5].

Cur frame Page 95 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 5.13 *Faalruimte als functie van de basisvariabelen.*

Punt A (zie fig. 5.13) is het punt op de rand van het faalgebied met de grootste gezamenlijke kansdichtheid van U_1 en U_2. Dit punt voldoet dus aan de definitie van het ontwerppunt (zie 5.1.2). De coördinaten van dit punt zijn gegeven door:

$$(u_1, u_2) = \left(-\frac{\sigma_R}{\sigma_Z}\beta, \frac{\sigma_S}{\sigma_Z}\beta\right) = (\alpha_1\beta, \alpha_2\beta) \tag{5.42}$$

waarin:

$$\alpha_1 = -\sigma_R/\sigma_Z$$
$$\alpha_2 = \sigma_S/\sigma_Z$$

In het *RS*-vlak is het ontwerppunt gegeven door:

$$R^* = \mu_R + \alpha_1\beta\sigma_R$$
$$S^* = \mu_S + \alpha_2\beta\sigma_S \tag{5.43}$$

Als de betrouwbaarheidsfunctie wordt geschreven als vergelijking (5.34), dan geldt voor de invloedscoëfficinten:

$$\alpha_i = \frac{-a_i\sigma_{X_i}}{\sigma_Z} \tag{5.44}$$

Dit kan het beste worden toegelicht met behulp van een voorbeeld.

VOORBEELD 5.1

Gegeven is de betrouwbaarheidsfunctie: Z = 4a + 2b – c + 3.

De basisvariabelen a, b en c zijn stochastisch onafhankelijke normaal verdeelde variabelen.

Cur frame Page 96 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Verder is gegeven:

$\mu_a = 20 \quad \sigma_a = 5$

$\mu_b = 10 \quad \sigma_b = 1$

$\mu_c = 20 \quad \sigma_c = 10$

De gemiddelde waarde van Z is:

$$\mu_Z = 4 \cdot 20 + 2 \cdot 10 - 20 + 3 = 83$$

De standaardafwijking bedraagt:

$$\sigma_Z = \sqrt{(4 \cdot 5)^2 + (2 \cdot 1)^2 + 10^2} = 22,45$$

De betrouwbaarheidsindex is:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = 3,697$$

De faalkans is dus:

$$P_f = P(Z < 0) = \Phi(3,697) = 10^{-4}$$

Het ontwerppunt kan worden gevonden met de invloedscoëfficiënten:

$$\alpha_1 = -\frac{4 \cdot 5}{22,45} = -0,891$$

$$\alpha_2 = -\frac{2}{22,45} = -0,089$$

$$\alpha_3 = \frac{10}{22,45} = 0,445$$

De waarden van de basisvariabelen in het ontwerppunt bedragen:

$$a^* = 20 - 0,891 \cdot 3,697 \cdot 5 = 3,53$$

$$b^* = 10 - 0,089 \cdot 3,697 \cdot 1 = 9,67$$

$$c^* = 20 + 0,445 \cdot 3,697 \cdot 10 = 36,45$$

In het voorgaande geval met een lineaire betrouwbaarheidsfunctie en stochastisch onafhankelijke normaal verdeelde variabelen is het dus eenvoudig om de faalkans exact te bepalen met behulp van de verwachtingswaarden en standaardafwijkingen van de basisvariabelen. In de praktijk zal echter zelden aan deze voorwaarden worden voldaan. In die gevallen zal er verder moeten worden geschematiseerd door linearisatie van de betrouwbaarheidsfunctie en transformatie van de variabelen.

5.3.2 NIET-LINEAIRE BETROUWBAARHEIDSFUNCTIES

In het geval de betrouwbaarheidsfunctie een niet-lineaire functie is van een aantal onafhankelijke normaal verdeelde basisvariabelen, is de verdeling van deze functie niet normaal. De functie kan worden benaderd door de eerste twee termen van de Taylor-polynoom. De benadering luidt:

Cur frame Page 97 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

$$Z = g(\vec{X}) \approx g(\vec{X}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial X_i}(\vec{X}_0)(X_i - X_{0_i}) \tag{5.45}$$

Deze benadering van Z is wel lineair en is volgens de centrale limietstelling normaal verdeeld.
De verwachtingswaarde van de betrouwbaarheidsfunctie is te benaderen met de verwachtingswaarde van de gelineariseerde functie:

$$\mu_Z \approx g(\vec{X}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial X_i}(\vec{X}_0)(\mu_{X_i} - X_{0_i}) \tag{5.46}$$

Dit geldt ook voor de standaardafwijking:

$$\sigma_Z = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i}(\vec{X}_0)\sigma_{X_i}\right)^2} \tag{5.47}$$

Met behulp van de benaderingen van de verwachtingswaarde en de standaardafwijking kan de betrouwbaarheidsindex worden benaderd.

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{g(\vec{X}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial X_i}(\vec{X}_0)(\mu_{X_i} - X_{0_i})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i}(\vec{X}_0)\sigma_{X_i}\right)^2}} \tag{5.48}$$

In het geval de betrouwbaarheidsfunctie wordt gelineariseerd in het punt $\vec{X}_0 = (\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \ldots, \mu_{X_n})$, reduceert vergelijking (5.48) tot:

$$\beta \approx \frac{g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \ldots, \mu_{X_n})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i}(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \ldots, \mu_{X_n})\sigma_{X_i}\right)^2}} \tag{5.49}$$

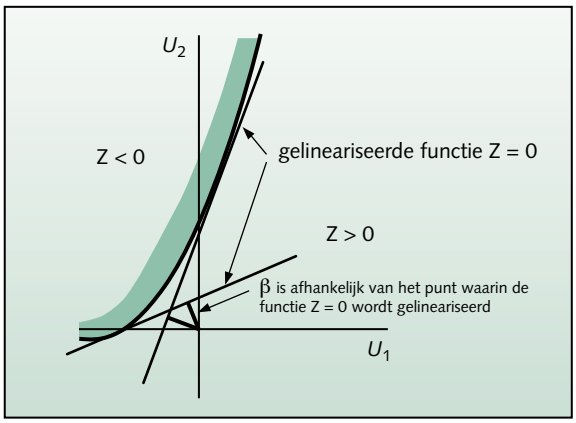
Deze benadering van de betrouwbaarheidsindex is bekend als de Mean Value benadering. De Mean Value benadering geeft een goed inzicht in het karakter van de niveau II methode. De essentie van de niveau II methode is het bepalen van de bijdrage van de spreiding in de basisvariabelen aan de spreiding in de betrouwbaarheidsfunctie. In feite is er sprake van een gewogen gevoeligheidsanalyse. De gevoeligheid van de oplossing Z = 0 voor een kleine variatie in de waarde van een basisvariabele wordt bepaald door de partiële differentiatie. Daarna heeft er een weging plaats door de gevoeligheid te vermenigvuldigen met de standaardafwijking van de variabele.
Uit vergelijking (5.48) blijkt dat de benadering van β met behulp van de gelineariseerde betrouwbaarheidsfunctie afhankelijk is van het punt waarin de functie wordt gelineariseerd.
Dit is eenvoudig te illustreren met een betrouwbaarheidsfunctie met twee basisvariabelen X_1 en X_2. Als voorbeeld wordt de niet-lineaire betrouwbaarheidsfunctie $Z = 2X_1^2 - X_2$ genomen. Transformatie van de

Cur frame Page 98 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

basisvariabelen X_1 en X_2 naar standaard normaal verdeelde variabelen U_1 en U_2, leidt tot een nieuwe formulering van de betrouwbaarheidsfunctie, te weten:

$$Z = 2\sigma_{X_1}U_1^2 + 4\sigma_{X_1}\mu_{X_1}U_1 + 2\mu_{X_1}^2 - \sigma_{X_2}U_2 - \mu_{X_2} \tag{5.50}$$

In figuur 5.14 is het faalgebied weergegeven in het U_1,U_2-vlak. De figuur laat zien dat een linearisatie van de Z-functie in verschillende punten leidt tot verschillende waarden van de benadering van de betrouwbaarheidsindex. De formulering van de betrouwbaarheidsindex volgens vergelijking (5.48) is derhalve niet zonder meer bruikbaar.



Figuur 5.14 *Linearisatie van de betrouwbaarheidsfunctie.*

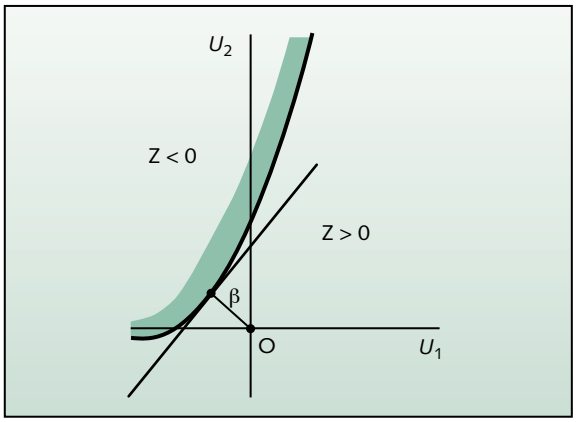
De definitie van de betrouwbaarheidsindex volgens HASOFER en LIND [5.5] (zie 5.3.1) is niet afhankelijk van het al dan niet lineair zijn van de betrouwbaarheidsfunctie. De afstand van de rand van het faalgebied (Z = 0) tot de oorsprong van het getransformeerde coördinatenstelsel is:

$$\beta = \min_{Z=0}\left(\sqrt{U_1^2 + U_2^2}\right) \tag{5.51}$$

Het punt A op de rand van het faalgebied met de kleinste afstand tot de oorsprong is het ontwerppunt. Uit figuur 5.15 blijkt dat de benadering van β, met behulp van de gelineariseerde Z-functie in het ontwerppunt, exact de afstand is van de oorsprong tot de rand van het faalgebied, als de functie is gelinealiseerd in het ontwerppunt. Het vinden van het ontwerppunt is een iteratief proces. Hiervoor zijn verschillende methoden beschikbaar. Het zoeken naar het ontwerppunt is in feite een optimaliseringsprobleem, immers er wordt gezocht naar de kleinste afstand OA. Voor het vinden van het ontwerppunt kunnen vele bekende analytische en numerieke optimaliseringsroutines worden toegepast. Hier zullen twee methoden worden toegelicht. De kern van de methoden is in feite dezelfde, maar de formulering van de betrouwbaarheidsfunctie verschilt. De eerste methode gaat uit van de genormeerde betrouwbaarheidsfunctie. Dat wil zeggen dat alle basis-variabelen worden getransformeerd naar standaard normaal verdeelde variabelen.
Het ontwerppunt wordt gegeven door de coördinaten:

$$(U_1^*, U_2^*, \ldots, U_n^*) = (\alpha_1\beta, \alpha_2\beta, \ldots, \alpha_n\beta) \text{ en } X_i^* = \mu_{X_i} + U_i^*\sigma_{X_i} \tag{5.52}$$

Cur frame Page 99 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 5.15 *Linearisatie van de betrouwbaarheidsfunctie in het ontwerppunt.*

Een snelle procedure voor het vinden van het ontwerppunt en β is gebaseerd op het iteratief oplossen van het stelsel vergelijkingen:

$$\alpha_i = -\frac{\frac{\partial f}{\partial U_i}(\dot{\alpha}\beta)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial U_j}(\dot{\alpha}\beta)\right)^2}},\ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (5.53)$$

$$f(\alpha_1\beta, \alpha_2\beta, \ldots, \alpha_n\beta) = 0$$

waarin:

$f(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ is de betrouwbaarheidsfunctie als functie van de genormeerde basisvariabelen.

De werkwijze van de methode kan het beste worden toegelicht met een voorbeeld.

VOORBEELD 5.2

Gegeven is de betrouwbaarheidsfunctie: $Z = g(a,b,c) = ab - c$.
De basisvariabelen a, b en c zijn stochastisch onafhankelijke normaal verdeelde variabelen.
Verder is gegeven:

$\mu_a = 8$ $\quad \sigma_a = 2$
$\mu_b = 3$ $\quad \sigma_b = 1$
$\mu_c = 4$ $\quad \sigma_c = 2$

Gevraagd wordt het ontwerppunt te bepalen met de daarbij behorende betrouwbaarheidsindex.
Als eerste worden de basisvariabelen getransformeerd naar standaard normaal verdeelde variabelen.
De betrouwbaarheidsfunctie van de getransformeerde variabelen is:

$$Z = f(U_1, U_2, U_3) = 6U_1 + 2U_1U_2 + 8U_2 - 2U_3 + 20$$

Cur frame Page 100 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

In het ontwerppunt geldt:

$$f(\alpha_1\beta, \alpha_2\beta, \alpha_3\beta) = 0$$
$$6\alpha_1\beta + 2\alpha_1\alpha_2\beta^2 + 8\alpha_2\beta - 2\alpha_3\beta = -20$$

Hieruit is een formulering voor β af te leiden. Samen met de formules voor α_1, α_2 en α_3 wordt het op te lossen stelsel vergelijkingen gevormd:

$$\beta = \frac{-20}{6\alpha_1 + 2\alpha_1\alpha_2\beta + 8\alpha_2 - 2\alpha_3} \qquad \alpha_1 = -\frac{6 + 2\alpha_2\beta}{\sqrt{(6 + 2\alpha_2\beta)^2 + (8 + 2\alpha_1\beta)^2 + 2^2}}$$
$$\alpha_2 = -\frac{8 + 2\alpha_1\beta}{\sqrt{(6 + 2\alpha_2\beta)^2 + (8 + 2\alpha_1\beta)^2 + 2^2}} \qquad \alpha_3 = \frac{2}{\sqrt{(6 + 2\alpha_2\beta)^2 + (8 + 2\alpha_1\beta)^2 + 2^2}}$$

Met behulp van successieve substitutie kan dit stelsel worden opgelost. Het probleem is nog het kiezen van reële startwaarden voor β, α_1, α_2 en α_3. De startwaarde van β kan worden bepaald met een Mean Value benadering:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{g(\mu_a, \mu_b, \mu_c)}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial a}(\mu_a, \mu_b, \mu_c)\cdot\sigma_a\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial b}(\mu_a, \mu_b, \mu_c)\cdot\sigma_b\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial c}(\mu_a, \mu_b, \mu_c)\cdot\sigma_c\right)^2}}$$
$$= \frac{8\cdot 3 - 4}{\sqrt{(3\cdot 2)^2 + (8\cdot 1)^2 + (1\cdot 2)^2}} = 1{,}96$$

De startwaarden van α_1, α_2 en α_3 worden in absolute waarde gelijk gekozen, echter met verschillend teken. Met de waarden van β, α_1, α_2 en α_3 worden nieuwe waarden berekend totdat deze stabiel blijven. Het resultaat is gegeven in tabel 5.1.
Met de gevonden waarden voor β, α_1, α_2 en α_3 kunnen het ontwerppunt en de faalkans worden berekend.
Het ontwerppunt is:

$$a^* = \mu_a + \alpha_1\beta\sigma_a = 8 - 0{,}20\cdot 2{,}39\cdot 2 = 7{,}04$$
$$b^* = \mu_b + \alpha_2\beta\sigma_b = 3 - 0{,}94\cdot 2{,}39\cdot 1 = 0{,}75$$
$$c^* = \mu_c + \alpha_3\beta\sigma_c = 4 + 0{,}27\cdot 2{,}39\cdot 2 = 5{,}29$$

En de faalkans is:

$$P_f = \Phi(-\beta) = \Phi(-2{,}39) = 0{,}0084$$

Cur frame Page 101 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Tabel 5.1

		startwaarde	iteratie stapnummer					
			1	2	3	4	5	6
	β	1,96	2,51	2,49	2,42	2,39	2,39	2,39
	α_1	–0,58	–0,52	–0,32	–0,23	–0,21	–0,20	–0,20
	α_2	–0,58	–0,80	–0,89	–0,93	–0,94	–0,94	–0,94
	α_3	0,58	0,28	0,33	0,29	0,27	0,27	0,27

De tweede methode is in feite afgeleid van de hiervoor behandelde methode, met als voordeel dat de betrouwbaarheidsfunctie niet behoeft te worden getransformeerd naar een functie van standaard normaal verdeelde variabelen. In dit geval wordt voor de in een punt gelineariseerde betrouwbaarheidsfunctie de β-waarde berekend met vergelijking (5.48). Met deze β-waarde wordt vervolgens een nieuw punt bepaald, waarin de betrouwbaarheidsfunctie wordt gelineariseerd.
De α_i-waarden worden in dit geval berekend met:

$$\alpha_i = - \frac{\frac{\partial}{\partial X_i} g(\grave{X}^*)\sigma_{X_i}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial X_j} g(\grave{X}^*)\sigma_{X_j}\right)^2}} = - \frac{\frac{\partial}{\partial X_i} g(\grave{X}^*)\sigma_{X_i}}{\sigma_Z} \tag{5.54}$$

Het nieuwe punt, waarin de β- en α_i-waarden opnieuw worden berekend, wordt bepaald door:

$$X_i^* = \mu_i + \alpha_i \beta \sigma_{X_i} \tag{5.55}$$

Het beste kan de methode worden toegelicht aan de hand van een voorbeeld.

VOORBEELD 5.3

Ter illustratie zal hetzelfde probleem worden behandeld als bij voorbeeld 5.2.
De betrouwbaarheidsfunctie is: Z = g(a,b,c) = ab – c.
De basisvariabelen a, b en c zijn stochastisch onafhankelijke normaal verdeelde variabelen met:

$\mu_a = 8$ $\quad \sigma_a = 2$
$\mu_b = 3$ $\quad \sigma_b = 1$
$\mu_c = 4$ $\quad \sigma_c = 2$

Gevraagd wordt wederom het ontwerppunt te bepalen met de daarbij behorende betrouwbaarheidsindex.
De partiële afgeleiden zijn:

$$\frac{\partial g}{\partial a}(a^*, b^*, c^*) = b^*; \quad \frac{\partial g}{\partial b}(a^*, b^*, c^*) = a^*; \quad \frac{\partial g}{\partial c}(a^*, b^*, c^*) = -1$$

Cur frame Page 102 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Hieruit volgt:

$$\sigma_Z = \sqrt{(b^*\sigma_a^{\,2}) + (a^*\sigma_b^{\,2}) + \sigma_c^2}$$

$$\mu_Z = (a^*b^* - c^*) + b^*(8 - a^*) + a^*(3 - b^*) - (4 - c^*)$$

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z};\quad \alpha_1 = -\frac{b^*\sigma_a}{\sigma_Z};\quad \alpha_2 = -\frac{a^*\sigma_b}{\sigma_Z};\quad \alpha_3 = \frac{\sigma_c}{\sigma_Z}$$

Met de voorgaande formules kan bij een in een punt gelineariseerde betrouwbaarheidsfunctie een nieuwe schatting van het ontwerppunt worden berekend. In tabel 5.2 zijn de resultaten van zes iteraties vermeld.

Uit de vergelijking van de resultaten in tabel 5.2 met die in tabel 5.1 volgt dat de beide methoden ongeveer even snel convergeren naar het ontwerppunt. Wel is het aantal berekeningen per iteratieslag bij de laatste methode groter. Daarentegen is het niet nodig om de betrouwbaarheidsfunctie te transformeren. Op grond hiervan is de laatste methode eenvoudiger toe te passen in een computerprogramma.

Tabel 5.2.

		startwaarde	iteratie stapnummer					
			1	2	3	4	5	6
	σ_z		10,20	6,70	6,46	7,12	7,35	7,43
	μ_z		20,00	16,45	15,54	17,02	17,56	17,75
	β		1,96	2,45	2,41	2,39	2,39	2,39
	α_1		–0,59	–0,44	–0,28	–0,23	–0,21	–0,20
	α_2		–0,78	–0,85	–0,91	–0,93	–0,94	–0,94
	α_3		0,20	0,30	0,31	0,28	0,27	0,27
	a*	8	5,69	5,86	6,63	6,90	7,00	7,03
	b*	3	1,46	0,92	0,82	0,77	0,76	0,75
	c*	4	4,77	5,46	5,49	5,34	5,30	5,29

5.3.3 NIET-NORMAAL VERDEELDE BASISVARIABELEN

Als er sprake is van stochastisch onafhankelijke niet-normaal verdeelde basisvariabelen, is het aannemelijk dat ook de betrouwbaarheidsfuncie niet-normaal verdeeld is. Om toch de niveau II benaderingsmethoden te kunnen toepassen, moeten de niet-normaal verdeelde basisvariabelen worden getransformeerd naar normaal verdeelde basisvariabelen.

De meest eenvoudige transformatie is die van niet-normaal naar standaard normaal. Evenals bij de transformatie van een variabele met een willekeurige normale verdeling naar de standaard normaal verdeelde variabele moet in het ontwerppunt gelden:

$$F_X(X^*) = \Phi(U^*) \tag{5.56}$$

Cur frame Page 103 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Hieruit volgt:

$$U^* = \Phi^{-1}\left(F_X(X^*)\right)$$
$$X^* = F_X^{-1}\left(\Phi(U^*)\right) \qquad (5.57)$$

waarin:

Φ^{-1} is de inverse standaard normale verdeling;
F^1 is de inverse kansverdeling van X.

Door deze transformatie kan een aanvankelijk eenvoudige betrouwbaarheidsfunctie gecompliceerd worden. Rackwitz en Fiessler [5.6] hebben een transformatie geïntroduceerd, waarbij een variabele met een willekeurige verdeling wordt getransformeerd naar een normaal verdeelde variabele. Bij deze transformatie wordt in het ontwerppunt ervan uitgegaan dat de waarden van de werkelijke en de benaderende kansdichtheids- en kansverdelingsfuncties aan elkaar gelijk zijn. Dit geeft het stelsel vergelijkingen:

$$F_X(X^*) = \Phi\left(\frac{X^* - \mu'_X}{\sigma'_X}\right)$$
$$f_X(X^*) = \frac{1}{\sigma'_X}\varphi\left(\frac{X^* - \mu'_X}{\sigma'_X}\right) \qquad (5.58)$$

waarin:

φ is de standaard normale kansdichtheidsfunctie.

Oplossen van het stelsel vergelijkingen geeft:

$$\sigma'_X = \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}\left(F_X(X^*)\right)\right)}{f_X(X^*)}$$
$$\mu'_X = X^* - \Phi^{-1}\left(F_X(X^*)\right)\sigma'_X \qquad (5.59)$$

Uit de vergelijkingen (5.59) blijkt dat de standaardafwijking en het gemiddelde van de benaderende normale verdeling afhankelijk zijn van de waarde van X in het ontwerppunt. In de iteratieve berekening van het ontwerppunt en de betrouwbaarheidsindex moet daarom in elke stap een nieuwe waarde voor σ'_X en μ'_X worden berekend. Dit wordt geïllustreerd in voorbeeld 5.4.

Cur frame Page 104 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

VOORBEELD 5.4

Wederom wordt hetzelfde probleem beschouwd als in voorbeeld 5.2. Echter nu wordt aangenomen dat de basisvariabele c uniform verdeeld is op het interval (–20, 28).
Het gemiddelde en de standaardafwijking van c zijn dus hetzelfde als in voorbeeld 5.2.
De kansdichtheidsfunctie en de kansverdeling van c luiden:

$$f_c(c) = \frac{1}{48} \qquad -20 \le c \le 28$$
$$F_c(c) = \frac{c+20}{48}$$

De getransformeerde betrouwbaarheidsfunctie is in dit geval:

$$Z = 6U_1 + 2U_1U_2 + 8U_2 + 24 - \mu'_c - \sigma'_c U_3$$

Substitutie van $U_i = \alpha_i\beta$ in het ontwerppunt geeft:

$$6\alpha_1\beta + 2\alpha_1\alpha_2\beta^2 + 8\alpha_2\beta + 24 - \mu'_c - \sigma'_c\alpha_3\beta = 0$$

Vervolgens kunnen de iteratieformules worden opgesteld op dezelfde wijze als is gebeurd bij voorbeeld 5.2.
Het op te lossen stelsel vergelijkingen is nu:

$$\beta = \frac{-24 + \mu'_c}{6\alpha_1 + 2\alpha_1\alpha_2\beta + 8\alpha_2 - \sigma'_c\alpha_3}$$
$$\alpha_2 = -\frac{8 + 2\alpha_1\beta}{\sqrt{(6 + 2\alpha_2\beta)^2 + (8 + 2\alpha_1\beta)^2 + \sigma'^2_c}}$$

$$\alpha_1 = -\frac{6 + 2 \cdot \alpha_2 \cdot \beta}{\sqrt{(6 + 2\alpha_2\beta)^2 + (8 + 2\alpha_1\beta)^2 + \sigma'^2_c}}$$
$$\alpha_3 = \frac{\sigma'_c}{\sqrt{(6 + (2\alpha_2)\beta)^2 + (8 + (2\alpha_1)\beta)^2 + \sigma'^2_c}}$$

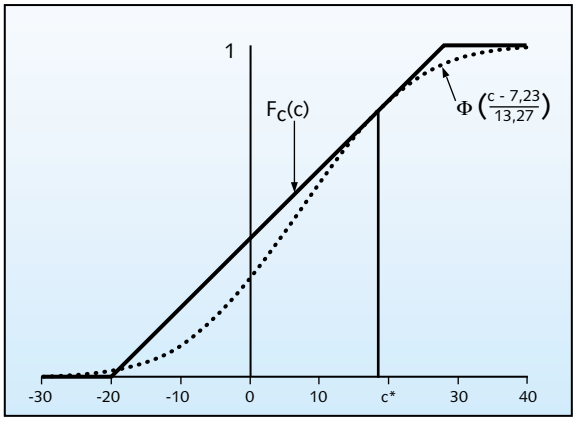
$$c^* = F_c^{-1}\left(\Phi(\alpha_3\beta)\right) = 48 \cdot \Phi(\alpha_3\beta) - 20$$
$$\sigma'_c = \frac{\varphi(\alpha_3\beta)}{f_c(c^*)} = \varphi(\alpha_3\beta) \cdot 48 \qquad \mu'_c = c^* - \alpha_3(\beta\sigma'_c)$$

In tabel 5.3 zijn de resultaten van een aantal iteraties gegeven. Uit de berekening blijkt dat de betrouwbaarheidsindex aanzienlijk kleiner is dan bij voorbeeld 5.2. In figuur 5.16 zijn ter illustratie de werkelijke en de benaderende kansverdeling in het ontwerppunt van c geschetst.

Cur frame Page 105 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Tabel 5.3

		startwaarde	iteratie stapnummer		
			1	2	3
	β	1,96	1,07	1,03	1,03
	α_1	–0,58	–0,31	–0,32	–0,31
	α_2	–0,58	–0,47	–0,47	–0,46
	α_3	0,58	0,83	0,82	0,83
	c*	21,87	19,00	18,50	18,60
	σ_c'	10,04	12,92	13,36	13,27
	μ_c'	10,46	7,54	7,16	7,23



Figuur 5.16 *Benadering van de werkelijke kansverdeling door een normale verdeling.*

5.3.4 STOCHASTISCH AFHANKELIJKE BASISVARIABELEN

Als de basisvariabelen afhankelijk zijn, zullen deze moeten worden getransformeerd naar onafhankelijke variabelen. Als er een duidelijk functioneel verband is tussen de variabelen, is het dikwijls mogelijk om de betrouwbaarheidsfunctie zodanig te formuleren dat er variabelen worden geëlimineerd. In veel gevallen is het verband tussen de variabelen niet exact bekend en is sprake van stochastische afhankelijkheid. In dit geval kunnen de basisvariabelen worden getransformeerd. Een algemene transformatiemethode is de Rosenblatt-transformatie.

De rosenblatt-transformatie gaat uit van de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie van de stochastische vector met de afhankelijke variabelen. Vanuit de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie van een vector van n stochastische variabelen kunnen de kansdichtheidsfuncties van n partiële vectoren worden bepaald door integratie.

$$f_i(X_1, \ldots, X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{X}}(X_1, \ldots, X_i, X_{i+1}, \ldots, X_n) dX_{i+1}, \ldots, dX_n \tag{5.60}$$

Vervolgens kunnen voor alle variabelen de voorwaardelijke kansverdelingen worden bepaald.

Cur frame Page 106 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

$$F_i(X_i|X_1, \ldots, X_{i-1}) = \frac{1}{N_i}\int_{-\infty}^{X_i} f_i(X_1, \ldots, X_{i-1}, \xi)d\xi \qquad i \geq 2$$
$$F_1(X_1) = \int_{-\infty}^{X_1} f_1(\xi)d\xi \tag{5.61}$$

waarin:

N_i is de constante die de verdeling normeert.

Deze factor wordt berekend met:

$$N_i = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(X_1, \ldots, X_{i-1}, \xi)d\xi \tag{5.62}$$

Hieruit volgt de voorwaardelijke kansdichtheidsfunctie:

$$f_i(X_i|X_1, \ldots, X_{i-1}) = \frac{\partial}{\partial X_i}F_i(X_i|X_1, \ldots, X_{i-1}) = \frac{1}{N_i}f_i(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i) \tag{5.63}$$

De Rosenblatt-transformatie transformeert de variabelen X_i met de waarde X_i in standaard normaal verdeelde variabelen met de waarden U_i, zodanig dat geldt:

$$\begin{aligned} U_1 &= \Phi^{-1}\left(F_1(X_1)\right) \\ U_2 &= \Phi^{-1}\left(F_2(X_2|X_1)\right) \\ &\vdots \\ U_n &= \Phi^{-1}\left(F_n(X_n|X_1, \ldots, X_{n-1})\right) \end{aligned} \tag{5.64}$$

Voor het transformeren van de betrouwbaarheidsfunctie is de inverse van de voorgaande transformatie van belang.

Deze is gegeven door:

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1^{-1}\left(\Phi(U_1)\right) \\ X_2 &= F_2^{-1}\left(\Phi(U_2)|X_1\right) \\ &\vdots \\ X_n &= F_n^{-1}\left(\Phi(U_n)|X_1, \ldots, X_{n-1}\right) \end{aligned} \tag{5.65}$$

Cur frame Page 107 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Uit de vergelijking van de voorgaande transformatie met de vergelijkingen (5.57) volgt dat de Rosenblatt-transformatie een algemeen toepasbare transformatie is voor niet-normaal verdeelde en/of stochastisch afhankelijke basisvariabelen.
Omwille van het verkrijgen van een eenvoudiger betrouwbaarheidsfunctie is het aantrekkelijk om de stochastisch onafhankelijke basisvariabelen nog verder te transformeren naar normaal verdeelde variabelen, waarvan de waarden van de kansverdeling en de kansdichtheid in het ontwerppunt gelijk zijn aan de waarden van de voorwaardelijke kansverdeling en kansdichtheid van de oorspronkelijke variabelen. Deze transformatie is hetzelfde als de transformatie uit 5.3.3.
De standaardafwijking en het gemiddelde van de benaderende normale verdeling zijn:

$$\sigma'_{X_i} = \frac{\varphi(U_i)}{f_X(X_i^*)}$$
$$\mu'_{X_i} = X_i^* - U_i\sigma'_X \qquad (5.66)$$

De wijze waarop de Rosenblatt-transformatie plaatsheeft, kan het beste worden geïllustreerd aan de hand van een rekenvoorbeeld.

VOORBEELD 5.5

Ook nu wordt weer dezelfde betrouwbaarheidsfunctie in beschouwing genomen als bij voorbeeld 5.2. De functie luidt:

$$Z = ab - c$$

De basisvariabelen a en b zijn stochastisch afhankelijk en de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie is:

$$f_{a,b}(a,b) = \left(\frac{a}{14{,}5} + \frac{b}{5{,}5} + \frac{ab}{79{,}75}\right) \cdot \frac{1}{59{,}8125}$$

met $0 \le a \le 14{,}5$ en $0 \le b \le 5{,}5$

De basisvariabele c is normaal verdeeld met $\mu_c = 4$ en $\sigma_c = 2$.
De basisvariabelen worden getransformeerd naar stochastisch onafhankelijke normaal verdeelde variabelen. De betrouwbaarheidsfunctie gaat daarmee over in:

$$Z = (\mu'_a + \sigma'_a U_1)(\mu'_b + \sigma'_b U_2) - (\mu'_c + \sigma'_c U_3)$$

In het ontwerppunt geldt:

$$(\mu'_a + \sigma'_a \alpha_1 \beta) \cdot (\mu'_b + \sigma'_b \alpha_2 \beta) - (\mu_c + \sigma_c \alpha_3 \beta) = 0$$

Cur frame Page 108 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Hieruit is de iteratieformule voor β af te leiden. Het stelsel op te lossen vergelijkingen luidt:

$$\beta = \frac{\mu_c - \mu'_a\mu'_b}{\sigma'_a\mu'_b\alpha_1 + \sigma'_b\mu'_a\alpha_2 + \sigma'_a\sigma'_b\alpha_1\alpha_2\beta - \sigma_c\alpha_3}$$

$$\alpha_1 = -\frac{\sigma'_a \cdot \mu'_b + \sigma'_a \cdot \sigma'_b \cdot \alpha_2 \cdot \beta}{\sqrt{(\sigma'_a\mu'_b + \sigma'_a\sigma'_b\alpha_2\beta)^2 + (\sigma'_b\mu'_a + \sigma'_a\sigma'_b\alpha_1\beta)^2 + \sigma_c^2}}$$

$$\alpha_2 = -\frac{\sigma'_b\mu'_a + \sigma'_a\sigma'_b\alpha_1\beta}{\sqrt{(\sigma'_a\mu'_b + \sigma'_a\sigma'_b\alpha_2\beta)^2 + (\sigma'_b\mu'_a + \sigma'_a\sigma'_b\alpha_1\beta)^2 + \sigma_c^2}}$$

$$\alpha_3 = \frac{\sigma'_c}{\sqrt{(\sigma'_a\mu'_b + \sigma'_a\sigma'_b\alpha_2\beta)^2 + (\sigma'_b\mu'_a + \sigma'_a\sigma'_b\alpha_1\beta)^2 + \sigma_c^2}}$$

waarin:

$\mu'_a, \sigma'_a, \mu'_b, \sigma'_b$ zijn de verwachtingswaarden en standaardafwijkingen van de benaderende verdelingen van de getransformeerde variabelen.

Deze waarden moeten per iteratieslag worden berekend met behulp van de algemene transformatieformules.
De voorwaardelijke kansdichtheidsfuncties worden bepaald door integratie.

$$f_1(a) = \int_0^{5,5} f_{a,b}(a,b)db = \left(\frac{a}{29} + \frac{1}{2}\right)\frac{5,5}{59,8125}$$

$$f_2(b|a) = \frac{f_{a,b}(a,b)}{f_1(a)} = \frac{1}{f_1(a)}\left(\frac{a}{14,5} + \frac{b}{5,5} + \frac{ab}{79,75}\right)\frac{1}{59,8125}$$

Hieruit volgen de voorwaardelijke kansverdelingen:

$$F_1(a) = \left(\frac{a^2}{58} + \frac{a}{2}\right)\frac{5,5}{59,8125}$$

$$F_2(b|a) = \frac{1}{f_1(a)}\left(\frac{a}{14,5} + \frac{b}{11} + \frac{ab}{159,50}\right)\frac{b}{59,8125}$$

Per iteratieslag kunnen de standaardafwijkingen en verwachtingswaarden worden berekend met:

$$a^* = F_1^{-1}\left(\Phi(\alpha_1\beta)\right) \qquad b^* = F_2^{-1}\left(\Phi(\alpha_2\beta)|a^*\right)$$

$$\sigma'_a = \frac{\varphi(\alpha_1\beta)}{f_1(a^*)} \qquad \sigma'_b = \frac{\varphi(\alpha_2\beta)}{f_2(b^*|a^*)}$$

$$\mu'_a = a^* - \alpha_1\beta\sigma'_a \qquad \mu'_b = b^* - \alpha_2\beta\sigma'_b$$

Cur frame Page 109 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Met deze formules kan het stelsel vergelijkingen iteratief worden opgelost. In tabel 5.4 is het resultaat van 6 iteratieslagen gegeven.

Tabel 5.4

	startwaarde	iteratie stapnummer					
		1	2	3	4	5	6
β	1,96	1,69	1,58	1,54	1,52	1,51	1,51
α_1	–0,58	–0,83	–0,84	–0,85	–0,85	–0,85	–0.85
α_2	–0,58	–0,46	–0,48	–0,47	–0,47	–0,47	–0,47
α_3	0,58	0,30	0,26	0,24	0,23	0,22	0,22
a*	2,56	1,64	1,90	1,96	1,99	2,00	2,00
b*	1,45	2,25	2,25	2,30	2,32	2,33	2,33
μ_a'	6,95	5,72	6,13	6,22	6,26	6,27	6,28
σ_a'	3,87	2,90	3,20	3,27	3,30	3,31	3,31
μ_b'	2,84	4,04	3,86	3,85	3,84	3,84	3,84
σ_b'	1,22	2,29	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12

5.4 VERGELIJKING VAN DE VERSCHILLENDE REKENMETHODEN

Voor het maken van de keuze uit de verschillende rekenmethoden voor het bepalen van de faalkans, is het gewenst deze methoden op een aantal punten met elkaar te vergelijken. Deze punten zijn:

a. De invloed van het aantal variabelen.
b. De gewenste nauwkeurigheid van de faalkansberekening.
c. De vorm van de faalruimte.
d. De stochastische afhankelijkheid van de basisvariabelen.
e. De stochastische afhankelijkheid van de betrouwbaarheidsfuncties.

ad a. *De invloed van het aantal variabelen*
Het aantal basisvariabelen heeft een grote invloed op de rekentijd bij het toepassen van numerieke integratie. Het toevoegen van één basisvariabele vergroot de rekentijd met een factor die gelijk is aan het aantal integratiestappen, waarin het domein van de bijbehorende integratievariabele wordt verdeeld.
Bij het toepassen van de niveau II rekenmethoden neemt de rekentijd lineair toe bij de toename van het aantal basisvariabelen. Op zich is dit niet verontrustend en geen reden om toepassing van de niveau II methoden uit te sluiten bij een groot aantal basisvariabelen. Bij niet-normaal verdeelde basisvariabelen neemt de nauwkeurigheid van de berekende faalkans toe bij vergroting van het aantal basisvariabelen (centrale limietstelling).
Het vergroten van het aantal basisvariabelen heeft voor het toepassen van Monte Carlo simulatie nauwelijks gevolgen voor de rekentijd. Ook de nauwkeurigheid van de faalkansberekening wordt niet beïnvloed door het aantal basisvariabelen.

Cur frame Page 110 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

ad b. *De gewenste nauwkeurigheid van de faalkansberekening*
In het geval de basisvariabelen normaal zijn verdeeld en de betrouwbaarheidsfunctie lineair is, is de met de niveau II methode berekende faalkans exact. Als sprake is van niet-lineariteit en/of niet-normaal verdeelde basisvariabelen, neemt de nauwkeurigheid af ten gevolge van de diverse benaderingen.
De niveau III methoden houden rekening met de oorspronkelijke verdelingen van de basisvariabelen. De analytische integratie geeft uiteraard de exacte oplossing. Bij de numerieke methoden, numerieke integratie en Monte Carlo simulatie wordt de nauwkeurigheid bepaald door de integratiestapgrootte en het aantal simulaties. Zeker bij toepassing van Importance Sampling of Adaptive Sampling kan een hoge nauwkeurigheid worden bereikt bij de faalkansberekening met niveau III methoden.

ad c. *De vorm van de faalruimte*
Bij de niveau III methode speelt de vorm van de faalruimte een belangrijke rol bij het toepassen van Importance Sampling. Problemen die kunnen ontstaan bij het toepassen van Importance Sampling kunnen worden opgelost door het toepassen van Adaptive Sampling.
De vorm van de grens van de faalruimte is van belang voor de nauwkeurigheid bij de faalkansberekening met behulp van numerieke integratie.
Discontinuïteiten in de definitie van de faalruimte geven bij het toepassen van niveau III methoden in principe geen problemen.
De niveau II benaderingsmethode gaat uit van de betrouwbaarheidsfunctie als definitie van de faalruimte. Discontinuïteiten in de betrouwbaarheidsfunctie kunnen bij toepassing van niveau II methoden leiden tot grote onnauwkeurigheid in de faalkansberekening. Een voorbeeld hiervan is gegeven in figuur 5.9. In dit geval zal met de niveau II methode slechts één ontwerppunt (a of b) worden gevonden. Dit probleem kan worden opgelost door de betrouwbaarheidsfunctie op te delen in continue functies en de berekende faalkansen te combineren.
Bij het bepalen van de faalkans worden de continue delen van de betrouwbaarheidsfunctie beschouwd als een seriesysteem (zie hoofdstuk 6). In dergelijke gevallen zal het toepassen van niveau III methoden de voorkeur genieten.

ad d. *De stochastische afhankelijkheid van de basisvariabelen*
Stochastische afhankelijkheid van de basisvariabelen kan zowel bij toepassing van niveau III als niveau II methoden in rekening worden gebracht. In de beide gevallen is het echter wel vereist dat de voorwaardelijke kansverdelingen van de basisvariabelen bekend zijn. Het rekenen met stochastische afhankelijkheid met niveau III methoden verschilt niet van het rekenen met stochastisch onafhankelijke variabelen. Bij de niveau II methoden moet de toch minder eenvoudige Rosenblatt-transformatie worden toegepast, wat leidt tot langere rekentijden.

ad e. *De stochastische afhankelijkheid van de betrouwbaarheidsfuncties*
Onder punt c is reeds aan de orde geweest dat de faalruimte kan worden gedefinieerd door verschillende betrouwbaarheidsfuncties. Bij een dergelijk geval is dikwijls sprake van stochastische afhankelijkheid van de betrouwbaarheidsfunctie. Dit wordt veroorzaakt door het voorkomen van dezelfde variabelen in de verschillende functies of door afhankelijkheid van de variabelen. De niveau III methoden kunnen zonder aanpassing worden toegepast, omdat deze methoden uitgaan van de definitie van de totale faalruimte. Bij de niveau II methoden wordt echter uitgegaan van de definitie van de betrouwbaarheidsfunctie. Zoals onder

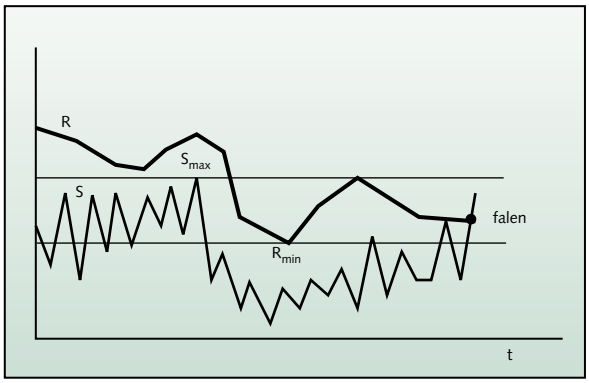
Cur frame Page 111 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

punt c is vermeld, moet een faalruimte, die wordt gedefinieerd door meer dan één betrouwbaarheidsfunctie, worden beschouwd als een seriesysteem. In hoofdstuk 6 wordt aandacht besteed aan het berekenen van de faalkans van systemen. Bij het toepassen van de niveau II methode kan de faalkans doorgaans alleen worden benaderd met een onder- en een bovengrens (zie hoofdstuk 6).

5.5 TIJDSAFHANKELIJKHEID

5.5.1 FAALKANS EN LEVENSDUUR

In het algemeen zijn zowel de belastingen als de sterkte functies van de tijd. Het heeft daarom doorgaans weinig zin om te spreken over een faalkans zonder de periode te vermelden, waarop deze betrekking heeft. In het geval alleen de belasting varieert in de tijd, is het verstandig om de maatgevende belasting te definiëren voor de periode die in beschouwing wordt genomen. Als de maatgevende belasting gelijk is aan de maximale belasting in de beschouwde periode, kan de kansverdeling worden bepaald met behulp van de theorie voor extreme waarden. Als het gaat om een vermoeiingsprobleem, moet de maatgevende belasting worden bepaald als de som van de belastingen over de periode. De berekening van de faalkans kan na definiëring van de maatgevende belasting plaatshebben met de niveau III of de niveau II methoden.
Als zowel de sterkte als de belasting tijdsafhankelijk zijn, moet voorzichtig worden omgegaan met het definiëren van de maatgevende sterkte en belasting. Het is immers mogelijk dat de maximale waarde van de belasting niet samenvalt met de minimale waarde van de sterkte (zie fig. 5.17). In een dergelijk geval moet worden uitgegaan van de momentane verdelingen van de sterkte en belastingen.



Figuur 5.17 *In de tijd variërende sterkte en belasting.*

De kans op falen in het tijdsinterval (0, t) is gelijk aan het complement van de kans dat in het interval geen falen optreedt.
In formulevorm is dit:

$$P_f(t) = 1 - P\left(\left(R(\tau) > S(\tau)\right) \text{ voor alle } \tau \in (0, t)\right) \tag{5.67}$$

waarin:

$R(\tau)$ is de sterkte op tijdstip τ;
$S(\tau)$ is de belasting op tijdstip τ.

Cur frame Page 112 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De sterkte $R(\tau)$ kan een functie zijn van de belasting over de periode $(0, \tau)$:

$$R(\tau) = R\Big(R_0, S(t) \text{ met } 0 < t < \tau\Big) \tag{5.68}$$

Dit is bijvoorbeeld het geval bij vermoeiing van materialen.
Falen kan worden gezien als het beëindigen van de levensduur van het element dat in beschouwing is genomen. De levensduur is een stochastische variabele. De kansverdeling van de levensduur is:

$$F_L(t) = P(L < t) = P_f(t) \tag{5.69}$$

De kansdichtheidsfunctie van de levensduur wordt gevonden door differentiëren van de kansverdeling:

$$f_L(t) = \frac{dF_L(t)}{dt} \tag{5.70}$$

De kans dat de levensduur eindigt tussen de tijdstippen t en t + dt, is te schrijven als:

$$P(t < L < t + dt) = F_L(t + dt) - F_L(t) = f_L(t)dt \tag{5.71}$$

Impliciet houdt het eindigen van de levensduur in (t, t + dt) in dat er in het interval (0, t) geen falen is opgetreden, dus:

$$f_L(t)dt = P\left(\Big(R(\tau) < S(\tau) \text{ voor } \tau \in (t, t + dt)\Big) \cap \Big(R(\tau) > S(\tau) \text{ voor } \tau \in (0, t)\Big)\right) \tag{5.72}$$

De kansdichtheidsfunctie wordt ook wel gezien als de kans op falen per tijdseenheid op een bepaald tijdstip, ofwel als een faaltempo. In de literatuur wordt veelal gesproken van het onvoorwaardelijke faaltempo. Een ander belangrijk begrip is het voorwaardelijke faaltempo, ook wel „hazard function" genoemd. Deze is gedefinieerd als:

$$r(t)dt = P\left(\Big(R(\tau) < S(\tau) \text{ voor } \tau \in (t, t + dt)\Big) \,\middle|\, R(\tau) > S(\tau) \text{ voor } \tau \in (0, t)\Big)\right) \tag{5.73}$$

Volgens de rekenregel $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ geldt:

$$\begin{aligned} f_L(t)dt &= r(t)dt\Big(1 - F_L(t)\Big) \\ r(t) &= \frac{f_L(t)}{1 - F_L(t)} \end{aligned} \tag{5.74}$$

Uit deze formulering blijkt dat, bij kleine waarden van de kansverdelingsfunctie van de levensduur, de waarden van het onvoorwaardelijke faaltempo en die van het voorwaardelijke faaltempo gelijk zijn.

Cur frame Page 113 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Substitutie van:

$$f_L(t) = \frac{dF_L(t)}{dt}$$

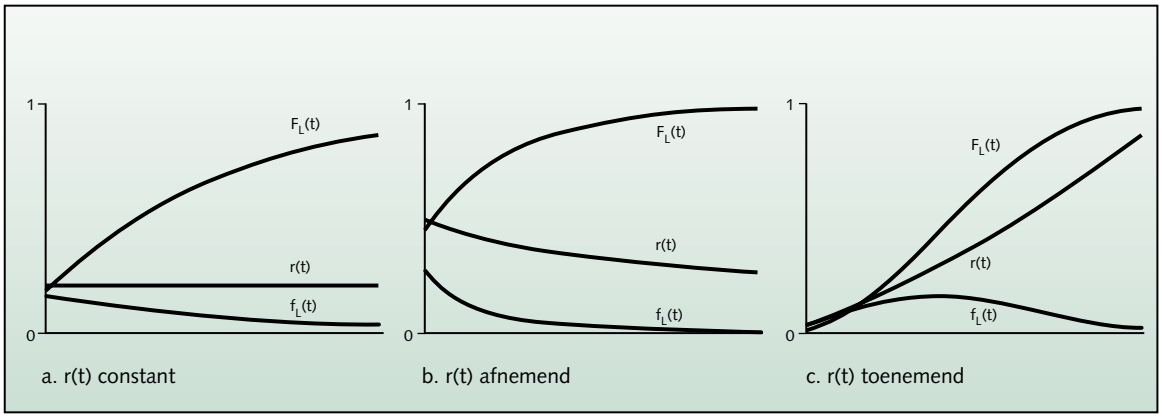
in vergelijking (5.74) geeft de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dF_L(t)}{dt} = \Big(1 - F_L(t)\Big) r(t) \tag{5.75}$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijking is:

$$F_L(t) = 1 - \exp \int_0^t - r(\tau) d\tau \tag{5.76}$$

In figuur 5.18 zijn voor een aantal gevallen de functies $F_L(t)$, $f_L(t)$ en r(t) getekend. In het geval a is sprake van een constante r(t). Dit betekent dat het feit dat het element niet heeft gefaald in een periode (0, t) geen invloed heeft op de faalkans in het interval (t, t + dt). Dit doet zich voor in het geval de kennis met betrekking tot de sterkte en de belasting niet verandert in de loop van de tijd.

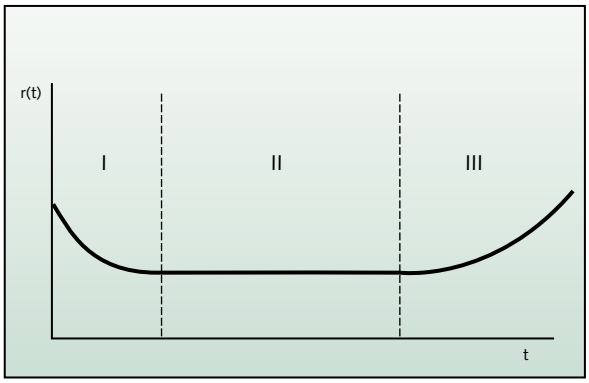


Figuur 5.18 *Voorwaardelijk faaltempo, onvoorwaardelijk faaltempo en kansverdeling van de levensduur.*

In het geval b neemt het voorwaardelijke faaltempo af. Dit kan een juiste beschouwing zijn voor elementen, waarbij de verwachtingswaarde van de sterkte toeneemt of die van de belasting afneemt in de tijd. Ook kan het zijn dat de standaardafwijking van de sterkte en/of de belasting afneemt.
In het geval c is sprake van een toenemend voorwaardelijk faaltempo. Een dergelijk geval treedt op als sprake is van veroudering, slijtage of vermoeiing.
In de praktijk treden vaak combinaties op van de verschillende vormen. In het algemeen resulteert dit in een functie r(t), zoals is getekend in figuur 5.19, die wordt aangeduid als de badkuipkromme. Er kunnen drie fasen worden onderscheiden, te weten:

I. de beginfase, waarbij falen kan optreden als gevolg van bouw- en ontwerpfouten;
II. de middenfase, waarin calamiteiten en extreme omstandigheden een rol spelen;
III. de eindfase met verhoogd faaltempo ten gevolge van veroudering of slijtage.

Cur frame Page 114 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 5.19 *Badkuipkromme.*

De beginfase, waarin de kans op falen dikwijls groter is dan in de middenfase, is over het algemeen onvermijdelijk. De eindfase met het verhoogde faaltempo ten gevolge van slijtage en veroudering, kan echter worden voorkomen of uitgesteld door het plegen van onderhoud of vervanging. Op het vraagstuk wanneer moet worden overgegaan tot onderhoud of vervanging wordt nader ingegaan in hoofdstuk 7.
In de techniek, en met name in de procestechniek, speelt het faaltempo in de middenfase een belangrijke rol. Dikwijls mag worden uitgegaan van een constant faaltempo. De kansverdeling van de levensduur laat zich dan schrijven als:

$$F_L(t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{5.77}$$

waarin:

$\lambda = r(t) = \text{constant}.$

De kansdichtheid van de levensduur is in dit geval:

$$f_L(t) = \lambda e^{-\lambda t} \tag{5.78}$$

De verwachtingswaarde van de levensduur is bekend als de gemiddelde tijd tot falen (Mean Time To Failure) en wordt bepaald door integratie:

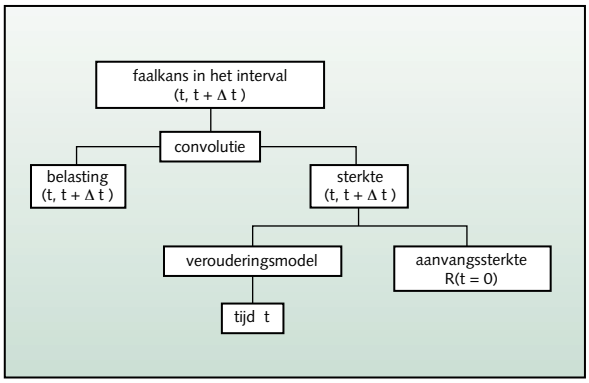
$$\mu_L = E(t) = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \tag{5.78}$$

De Mean Time To Failure speelt een belangrijke rol bij de bepaling van de niet-beschikbaarheid van elementen met een constant faaltempo en bij de planning van onderhoud en inspecties. In het geval het faaltempo niet constant is in de tijd, is deze vereenvoudiging niet mogelijk. Het bepalen van de betrouwbaarheid en de verwachtingswaarde van de levensduur voor deze elementen wordt beschreven in de volgende paragraaf.

Cur frame Page 115 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

5.5.2 VEROUDERINGSPROCESSEN

De oorzaak van het niet constant zijn van het faaltempo kan liggen bij een verandering van de sterkte of de belasting in de tijd. De veranderingen van de sterkte en de belastingen in de tijd kunnen worden aangeduid als verouderingsprocessen.
Bij deze verouderingsprocessen moet worden gedacht aan bijvoorbeeld materiaalvermoeidheid, roest, slijtage, chemische inwerking enzovoorts. Dergelijke processen laten zich het beste beschrijven als een stochastisch proces. Deze processen zijn van groot belang bij het bepalen van de betrouwbaarheid van systemen en het plannen van onderhoud.
De veranderingsprocessen van de belastingen zijn van groot belang voor het ontwerp en de modificatie van systemen. Hierbij valt te denken aan relatieve zeespiegelrijzing, klimatologische veranderingen enzovoorts.
De sterkte van een component in een systeem op een bepaald tijdstip wordt bepaald door het verouderingsproces. Onder het verouderingsproces met betrekking tot de sterkte wordt verstaan: de verandering van de sterkte in de tijd. Deze verandering van de sterkte kan een gevolg zijn van externe belastingen en interne processen.
Een sprekend voorbeeld hiervan is het verloop van de sterkte van een gewapend betonnen element. Direct na het storten van het beton is de sterkte van het beton nihil. Gedurende de verharding en het rijpingsproces heeft er sterkte-ontwikkeling plaats. Doorgaans heeft het beton na 28 dagen zijn karakteristieke sterkte bereikt, daarna blijft de sterkte geleidelijk toenemen. Als de gewapend betonnen constructie wordt blootgesteld aan mechanische of chemische belastingen, kan de sterkte van de constructie veranderen. Door indringing van vocht en chemicaliën in de wapeningszone, kan de wapening worden aangetast. De sterkte van het element neemt dan af. Ook kunnen processen in de drukzone aanleiding zijn tot sterktevermindering van het beton.
Uit figuur 5.20 blijkt dat het verouderingsproces van de sterkte een zeer belangrijke plaats inneemt bij het bepalen van de faalkans. Toch is juist de nodige kennis omtrent het exacte verouderingsgedrag van een systeem zelden of niet aanwezig. Veelal wordt getracht, met behulp van fysisch onderzoek en waarnemingen aan systemen, een wiskundige beschrijving te vinden voor het verloop van de sterkte in de tijd. Omdat het modelonderzoek en/of waarnemingen aan systemen slechts een beperkt tijdsinterval beslaan, is een daarop gebaseerd verouderingsmodel verkregen uit curve-fitting en extrapolatie. Dit betekent over het algemeen een introductie van een model-onzekerheid. De parameters die moeten worden ingevoerd in het model bevatten meestal ook onzekerheden. Deze zijn bijvoorbeeld afkomstig uit grondonderzoek of soms zelfs gebaseerd op ervaring en intuïtie. De in te voeren parameters laten zich daarom het beste beschrijven als stochastische variabelen, elk met een eigen kansdichtheidsfunctie.



Figuur 5.20 *Plaats van het verouderingsproces in het rekenschema voor het risico.*

Cur frame Page 116 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Het verouderingsproces kan dus het beste worden gemodelleerd als een stochastisch proces. Het resultaat is, dat voor elk tijdstip een gemiddelde waarde en een variantie voor de sterkte van het systeem wordt gevonden. De variantie zal groter zijn naarmate de onzekerheden in het wiskundige model en de in te voeren parameters groter zijn.
Het is mogelijk om de veroudering op twee essentieel verschillende methoden te modelleren. De eerste methode maakt gebruik van waarnemeningen van de sterkte in de tijd. De verandering van de sterkte per tijdseenheid kan worden gemodelleerd met een gemiddelde en een variantie. Bij deze modellering wordt geen analyse gemaakt van de oorzaak van de veroudering. In voorbeeld 5.6 wordt deze methode toegelicht.

VOORBEELD 5.6

Sinds 1964 zijn er jaarlijks registraties verricht van de hoogteligging van een smalle strook van de Nederlandse kust. Daartoe is langs de gehele Noordzeekust een stelsel van ruim 2500 meetraaien gedefinieerd, met een onderlinge afstand van 200 à 250 meter. De hoeveelheid zand in een dwarsprofiel kan worden gezien als een maat voor de sterkte van het profiel.
De verandering van de zandinhoud in een raai in een jaar kan als verouderingsmodel worden genomen.
Als voorbeeld wordt een raai in Noord-Holland genomen. De gemeten zandinhoud is gegeven in tabel 5.5. Aangenomen wordt dat de verandering van de zandinhoud elk jaar onafhankelijk is. De gemiddelde verandering van de zandinhoud in een jaar over de gemeten periode is $\overline{\Delta V} = -47{,}1$ m^3/m in een jaar en de standaardafwijking bedraagt $s_{\Delta V} = 110$ m^3/m in een jaar.

Tabel 5.5 *Jaarlijks gemeten zandinhoud in een raai.*

	jaar	inhoud	ΔV	jaar	inhoud	ΔV
	1964	8967		1975	8434	–118
	1965	8915	–52	1976	8404	–30
	1966	8750	–165	1977	8287	–117
	1967	8860	110	1978	8209	–78
	1968	8872	12	1979	8211	2
	1969	8655	–217	1980	8395	184
	1970	8746	91	1981	8265	–130
	1971	8807	61	1982	8226	–39
	1972	8705	–102	1983	8018	–208
	1973	8748	43	1984	8050	32
	1974	8552	–196	1985	7977	–73

$\Sigma(\Delta V) = -990$ m^3/m $\qquad \overline{\Delta V} = -47,1$ m^3/(m jaar)

$\Sigma(\Delta V^2) = 288428 \qquad \left(\text{VAR} = \left(288428 - 21 - (47,1)^2\right)/20 = 12088\right)$

$s_{\Delta V} = 110$ m^3/(m jaar)

Cur frame Page 117 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

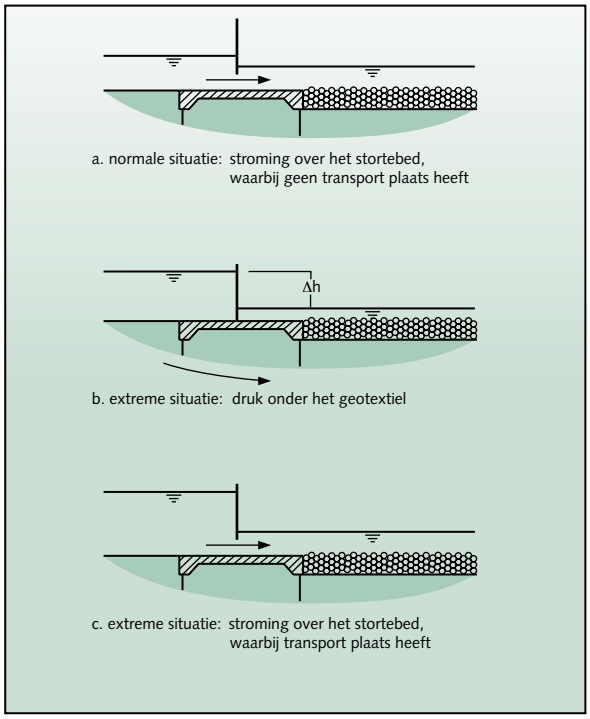
Bij gebrek aan meer informatie kan worden aangenomen dat de verandering van de zandinhoud in een jaar in de raai normaal verdeeld is met de parameter $\mu_{\Delta V} = -47{,}1\ m^3/m$ met $\sigma_{\Delta V} = 110\ m^3/m$.
Het verouderingsmodel is:

$$\Delta R(t) = \sum_{i=1}^{t} \Delta V_i$$

De tweede methode gaat uit van externe of interne belastingen die de veroudering veroorzaken en de weerstand van een element dat veroudering tegengaat. De veroudering wordt in dit geval gedefinieerd als een functie van de belasting en de weerstand. Zowel deze functie als de belasting- en weerstandsparameters bevatten onzekerheden. Deze methode kan het beste worden geïllustreerd met een voorbeeld.

VOORBEELD 5.7

Als voorbeeld wordt gekeken naar een stortebed op een geotextiel achter een stuw in een waterloop (zie fig. 5.21).
Het stortebed heeft als functie het ballasten van het geotextiel, dat uitspoeling van bodemmateriaal moet voorkomen.
De massa stortsteen per m^2 stortebed wordt als sterkte gedefinieerd.



Figuur 5.21 *Stortebed.*

Cur frame Page 118 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Er worden twee soorten belastingen onderscheiden, namelijk:
> extreme druk onder het filter;
> stroming over het filter.

De afname van de sterkte (massa per oppervlakte) wordt veroorzaakt door de meevoering van materiaal door het stromende water.
De belasting in het verouderingsmodel is derhalve de optredende stroomsnelheid. Gedurende 11 maanden van het jaar is de stroomsnelheid verwaarloosbaar klein en treedt er geen transport van stortsteen op. Gedurende 1 maand in elk jaar wordt een grotere hoeveelheid water afgevoerd. Aangenomen wordt dat gedurende deze periode van 1 maand de stroming stationair is (de stroomsnelheid verandert niet in de tijd) en dat de snelheden elk jaar onafhankelijk zijn. De stroomsnelheid is echter niet van tevoren bekend en wordt geschematiseerd als een stochastische variabele. De stroomsnelheid is normaal verdeeld met een gemiddelde $\mu_U = 4$ m/s en een standaardafwijking $\sigma_U = 0{,}5$ m/s. De kansdichtheidsfunctie van de stroomsnelheid is dan:

$$f_U(U) = \frac{1}{0{,}5 \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{4-U}{0{,}5}\right)^2\right)$$

Volgens deze verdeling zijn er ook negatieve en zeer grote stroomsnelheden mogelijk. Dit is niet juist als er in één richting stroming plaatsheeft en als de stroomsnelheid begrensd is. Dit laatste is bijna altijd het geval. Echter de kans op deze waarden is verwaarloosbaar klein bij de gegeven kansdichtheidsfunctie.
De weerstand van de constructie tegen transport wordt onder meer bepaald door de afmeting (de massa) van de stortsteen. Beneden een bepaalde kritieke stroomsnelheid treedt er geen transport van stortsteen op. Bij overschrijding van de kritieke stroomsnelheid neemt het transport toe met een bepaalde macht van de stroomsnelheid.
De relatie, die de achteruitgang in sterkte aangeeft bij gegeven belasting, wordt in dit voorbeeld als volgt verondersteld:

$$U \geq U_{kr} \Rightarrow T = A(U - U_{kr})^n$$
$$U < U_{kr} \Rightarrow T = 0$$

waarin:

T is de achteruitgang van de sterkte in een jaar in kg/m^2 in een jaar;
A is een constante, afhankelijk van de geometrie van de constructie en de weerstand tegen transport van de stortsteen in kg $\cdot$ s^n/m^{n+2} in een jaar;
n is een constante, afhankelijk van de geometrie van de constructie en de weerstand tegen transport van de stortsteen;
U is de stroomsnelheid achter de stuw in m/s;
U_{kr} is de stroomsnelheid, waarbij begin van transport optreedt in m/s.

Cur frame Page 119 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Meestal worden de waarden van A, U_{kr} en n uit modelonderzoek bepaald, het zijn dan stochastische variabelen. De relatie die het transport (= achteruitgang van de sterkte in een jaar) beschrijft, is dus beter te schrijven als:

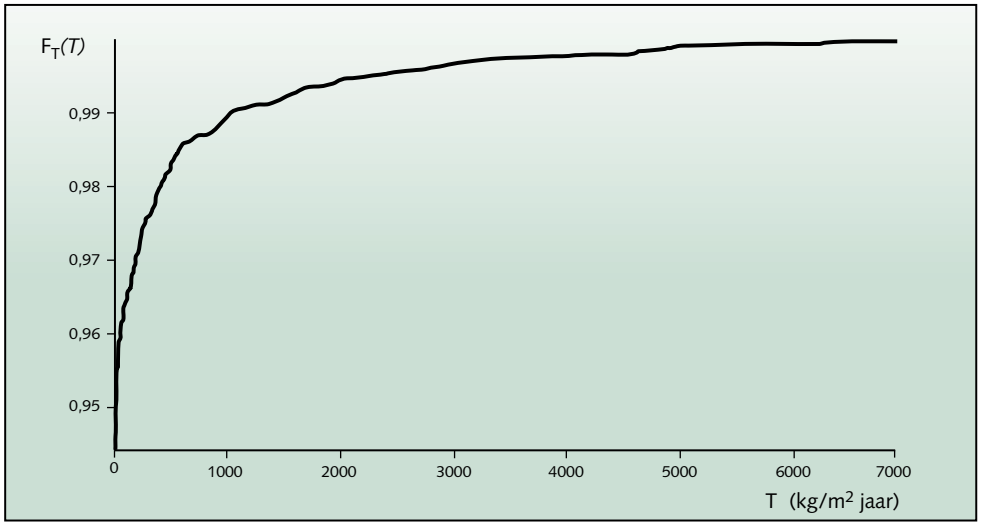
$$U \geq U_{kr} \Rightarrow T = A(U - U_{kr})^n \varepsilon$$

waarin:

ε is de model-onzekerheid.

Met behulp van simulatietechnieken kan de kansverdeling voor het transport worden benaderd. In figuur 5.22 is het resultaat van 5000 simulaties gegeven. Hierbij is aangehouden dat alle variabelen normaal verdeeld zijn met de parameters:

$\mu_A = 1260$ $\sigma_A = 126$
$\mu_U = 4$ $\sigma_U = 0{,}5$
$\mu_{U_{kr}} = 6$ $\sigma_{U_{kr}} = 1{,}2$
$\mu_n = 2$ $\sigma_n = 0{,}01$
$\mu_\varepsilon = 1$ $\sigma_\varepsilon = 0{,}02$



Figuur 5.22 *Kansverdeling van het transport in een jaar.*

Uit de kansverdeling volgt dat er een kans van circa 95 % is dat er geen transport van materiaal plaatsheeft, omdat in die gevallen de kritische stroomsnelheid niet wordt overschreden.
De verwachtingswaarde van het transport in een jaar ligt daarom dicht bij de nul-as.
De verwachtingswaarde van het transport in een jaar bedraagt $\mu_1 = 40$ kg/m^2 en de standaard-afwijking $\sigma_T = 336$ kg/m^2.

Cur frame Page 120 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Het verouderingsmodel is:

$$\Delta R(t) = \sum_{i=1}^{t} T_i$$

waarin:

T_i is het transport in jaar i.

Met behulp van het verouderingsmodel $\Delta R(t)$ is op stochastische wijze de sterkte op elk tijdstip vastgelegd:

$$R(t) = R(0) - \Delta R(t) \tag{5.80}$$

waarin:

R(0) is de aanvangssterkte
$\Delta R(t)$ is de veroudering na pariode (0, t)

Met de sterkte op tijdstip t kan het faaltempo van het element worden bepaald. In het geval onderhoud wordt gedefinieerd als het terugbrengen van de sterkte naar het beginniveau, is de hoeveelheid benodigd onderhoud op tijdstip t gelijk aan $\Delta R(t)$.

Voor in de tijd veranderende belasting geldt in feite hetzelfde als voor de veroudering met betrekking tot de sterkte van een systeem, met dien verstande dat de definitie van de grenstoestand met betrekking tot falen luidt:

$$Z = \Big(R(0) + \Delta R(t)\Big) - \Big(S(0) + \Delta S(t)\Big) \tag{5.81}$$

Een voorbeeld van een veranderingsproces van de belasting is te vinden bij een elektriciteitscentrale. Stel dat de capaciteit van een centrale wordt geschematiseerd als sterkte R(0). De capaciteit is afgestemd op een piekbelasting op tijdstip t = 0. Deze belasting is gebaseerd op het aantal aansluitingen op de centrale. Eventuele geplande uitbreiding van woonwijken en industriegebieden zullen het aantal aansluitingen laten toenemen.
Door het aantal nieuwe aansluitingen als functie van de tijd te beschouwen, kan de toename van de piekbelasting in de tijd $\Delta S(t)$ worden ingeschat.
Met behulp van de definitie van de grenstoestand kan de kans op een tekort aan capaciteit tijdens een piekbelasting op een willekeurig tijdstip t worden bepaald. Op deze wijze kan op voorhand worden beoordeeld of er op een gegeven tijdstip modificatie van de elektriciteitscentrale noodzakelijk is.
Andere voorbeelden van veranderingsprocessen van de belastingen zijn: de relatieve zeespiegelrijzing, toenemende verkeersintensiteit, toenemende rivierafvoer, toenemende milieubelasting enzovoorts.

Cur frame Page 121 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

5.5.3 RISICOBEREKENING BIJ SYSTEMEN MET EEN VARIABEL FAALTEMPO

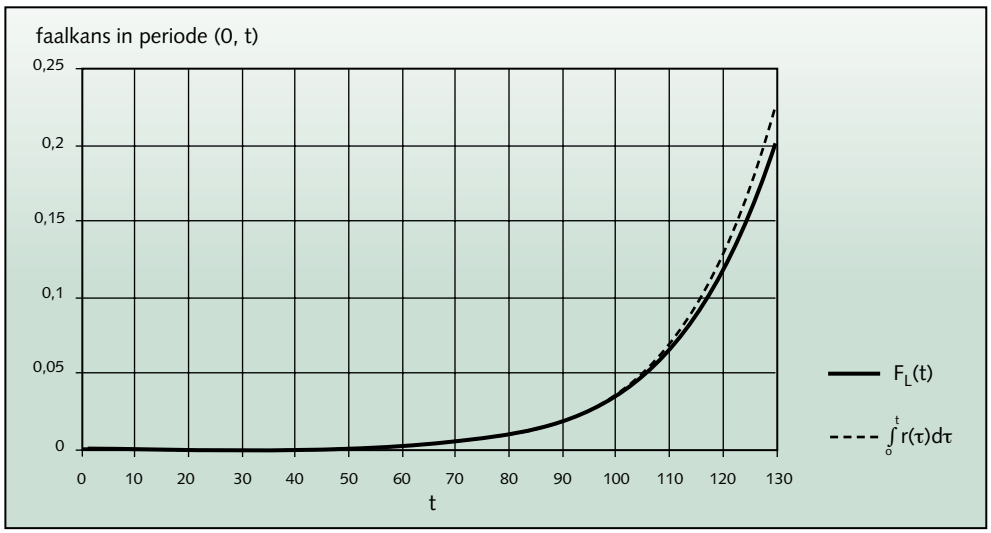
In 5.5.1 is de faalkans van een element als functie van de tijd aan de orde geweest. De relatie tussen het onvoorwaardelijke faaltempo, de kansverdeling van de levensduur en het voorwaardelijke faaltempo is gegeven als:

$$r(t) = \frac{f_L(t)}{1 - F_L t} \tag{5.82}$$

Bij kleine waarden van de kansverdeling van de levensduur zijn de waarden van r(t) en $f_L(t)$ nagenoeg gelijk en geldt bij benadering:

$$F_L(t) \approx \int_0^t -r(\tau)d\tau \tag{5.83}$$

In figuur 5.23 is een voorbeeld uitgezet van zowel: $F_L(t)$ als $\int_0^t -r(\tau)d\tau$



Figuur 5.23 *Vergelijking van de exacte faalkans met de benadering van vergelijking (5.83).*

Het blijkt dat de benadering zeer goed is voor faalkansen kleiner dan 0,1.
In het geval het gevolg van falen tijdsonafhankelijk is, kan het risico over een periode (0, t) worden gedefinieerd met de vierde definitie uit 3.1:

$$\text{risico} = F_L(t)g(x) \tag{5.84}$$

waarin:

x is het gevolg;
g(x) is de functie van het gevolg;
$F_L(t)$ is de faalkans over de periode (0, t).

Cur frame Page 122 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Dikwijls is het gevolg afhankelijk van de tijd. Hierbij kan worden gedacht aan zaken zoals inflatie, economische groei en ontwikkelingen die waardeverandering ten gevolge hebben. Bij een economische analyse van het risico is altijd sprake van tijdsafhankelijkheid van het gevolg. Doorgaans zal het gevolg worden gedefinieerd als de contante waarde van de schade.
Het economische risico kan in dit geval worden benaderd door:

$$C_R = \int_0^t g(x(\tau))r(\tau)d\tau \tag{5.85}$$

waarin:

C_R is een contante waarde van het risico;
$g(x(\tau))$ is een contante waarde van het gevolg bij falen op tijdstip τ;
$r(\tau)$ is het voorwaardelijke faaltempo.

Het voorwaardelijke faaltempo is afhankelijk van de aanvangssterkte, het verouderingsproces en de belasting. Voor één element geldt:

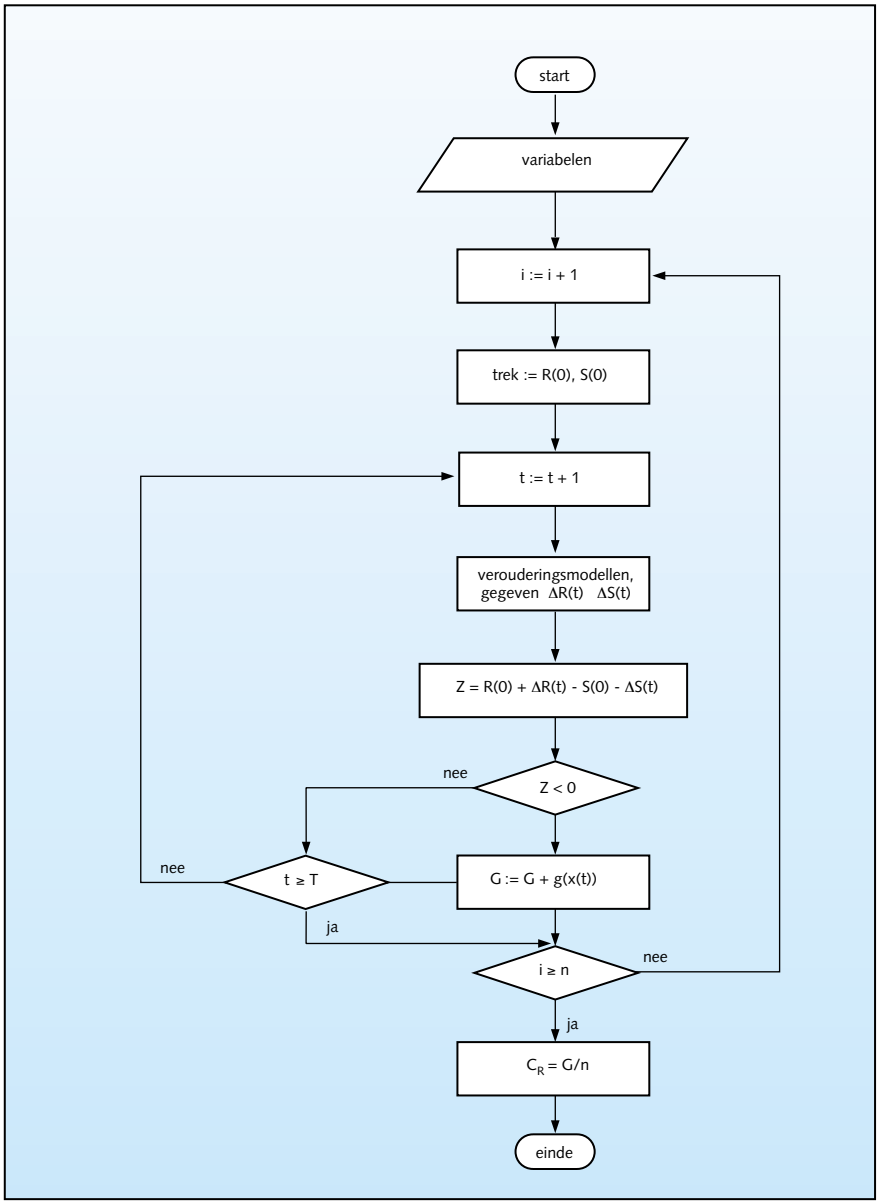
$$r(t)dt = P\Big(R(0) + \Delta R(t) < S(\tau), \tau \in (t, t + dt) \,|\, R(0) + \Delta R(\tau) > S(\tau), \tau \in (0, t)\Big) \tag{5.86}$$

Met behulp van niveau II faalkansberekeningen kan dit worden benaderd, gebruikmakend van de betrouwbaarheidsfunctie:

$$Z = R(0) + \Delta R(t) - S(t) \tag{5.87}$$

Deze benadering is redelijk nauwkeurig in het geval de faalkans in de verschillende tijdstappen stochastisch onafhankelijk is. Uiteraard is wel sprake van stochastische afhankelijkheid die volgt uit de aanvangssterkte op t = 0 en het verouderingsmodel. KUIJPER [5.7] heeft aangetoond dat een dergelijke schatting van het faaltempo een bovengrensbenadering is.
Met behulp van niveau III simulatietechnieken en niveau II transformaties wordt de stochastische afhankelijkheid geheel meegenomen. In figuur 5.24 is een stroomschema gegeven voor het schatten van het risico over een periode (0, T) met behulp van Monte Carlo simulatie.

Cur frame Page 123 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 5.24 *Stroomschema met behulp van Monte Carlo simulatie.*

5.5.4 NIET-BESCHIKBAARHEID

Onder niet-beschikbaarheid wordt verstaan de fractie van de tijd dat een element zijn functie niet kan vervullen. Volgens de betrouwbaarheidstheorie komt de niet-beschikbaarheid overeen met de kans dat een element op een willekeurig moment zijn functie niet naar wens kan vervullen. Bij de beschouwing van de niet-beschikbaarheid van een element of een systeem, waarin het element zich bevindt, moet rekening worden gehouden met het al dan niet merkbaar zijn van het falen van het element.

Cur frame Page 124 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Als een element niet-merkbaar kan falen, zal over het algemeen periodiek worden getest of de functie nog kan worden vervuld. Een telefoon is hiervan een voorbeeld. Als een telefoon stuk is, kan de eigenaar van de telefoon niet worden opgebeld. De eigenaar bemerkt dit pas als hij zelf wil bellen.
De niet-beschikbaarheid laat zich naar oorzaak verdelen in drie typen, te weten:

I. Niet-beschikbaarheid door niet-merkbaar falen; tussen het tijdstip van falen en testen functioneert het element niet, deze tijdsduur staat bekend als de uitvaltijd (Down Time).
II. Niet-beschikbaarheid door testen of periodiek onderhoud.
III. Niet-beschikbaarheid door reparatie of vervanging na het bemerken van het falen bij het testen of periodieke onderhoud.

De uitvaltijd is een stochastische variabele, waarvan de kansdichtheidsfunctie is af te leiden uit de kansdichtheidsfunctie van de levensduur door middel van een eenvoudige lineaire transformatie. De functie luidt:

$$f_{T_D}(T_D) = f_L(T - T_D) \tag{5.88}$$

waarin:

T_D is de uitvaltijd (Down Time);
T is de testinterval.

Bij een constant faaltempo r(t) = λ in de periode T geldt:

$$f_{T_D}(T_D) = \lambda e^{-\lambda(T - T_D)} \tag{5.89}$$

De gemiddelde uitvaltijd is in dit geval gedefinieerd als:

$$\mu_{T_D} = E(T_D) = \int_0^T \lambda e^{-\lambda(T - T_D)} T_D \, dT_D = T - \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \approx \frac{1}{2}\lambda T^2 \tag{5.90}$$

De niet-beschikbaarheid als gevolg van niet-merkbaar falen is dan:

$$U_{nmf} = \frac{\mu_{T_D}}{T} = 1 - \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T} \approx \frac{1}{2}\lambda T \tag{5.91}$$

Na ieder testinterval is er een periode dat het element niet beschikbaar is als gevolg van testen.
Deze periode wordt de testduur τ genoemd. De niet-beschikbaarheid als gevolg van het testen of periodiek onderhoud is:

$$U_{test} = \frac{\tau}{T + \tau} \tag{5.92}$$

Cur frame Page 125 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

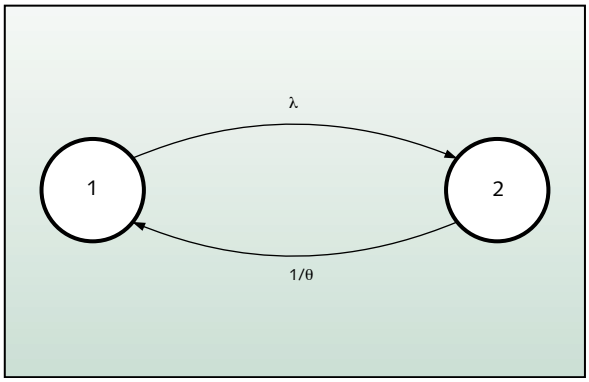
Als bij het testen falen van het element wordt vastgesteld, zal er reparatie of vervanging moeten plaatshebben. Hiervoor is een bepaalde hoeveelheid tijd nodig, die de reparatieduur θ wordt genoemd. De verwachte niet-beschikbaarheid die door reparatie wordt veroorzaakt bij een element met een constant faaltempo is gelijk aan:

$$U_{rep} = \frac{\theta}{\mu_L} = \frac{\theta}{1/\lambda} = \lambda\theta \tag{5.93}$$

In het geval er sprake is van merkbaar falen, zal het element direct na falen worden gerepareerd of vervangen. De niet-beschikbaarheid wordt dan alleen veroorzaakt door de reparatieduur.

5.5.5 MARKOV-PROCESSEN

Een stochastisch proces is een proces dat zich op verschillende tijdstippen in verschillende toestanden kan bevinden, waarbij het verloop van de toestand in de tijd wordt bepaald door een kansmechanisme.
Een voorbeeld hiervan is de beschrijving van de toestand van een binair element. Voor het element zijn twee toestanden te onderscheiden, te weten: functioneren en niet-functioneren. De kans dat een element op een bepaald tijdstip niet meer functioneert, wordt beschreven met de kansverdeling van de levensduur.
De verwachtingswaarde van de fractie van de tijd dat een herstelbaar element niet functioneert, is de niet-beschikbaarheid. In het voorgaande is zowel de kansverdeling van de levensduur als de niet-beschikbaarheid aan de orde geweest. In deze paragraaf wordt een methode beschreven voor het bepalen van de niet-beschikbaarheid van elementen, waarvan de toestand op een willekeurig tijstip wordt beschreven door een Markov-proces.
Een stochastisch proces is een Markov-proces, als de kansverdeling van de voortgang van het proces vanaf een willekeurig tijdstip uitsluitend wordt bepaald door de toestand op dat tijdstip en niet door de wijze waarop de toestand is bereikt. Een Markov-proces is derhalve een geheugenloos proces. In de betrouwbaarheids-analyse van een component betekent dit dat een gerepareerde component gelijkwaardig is aan een nieuwe component.
Het is gebruikelijk om een Markov-proces in een diagram weer te geven. In het diagram worden de toestanden, waarin het proces zich kan bevinden, aangegeven met een nummer.
De overgangswaarschijnlijkheden tussen de verschillende toestanden worden aangegeven met verbindingslijnen. Op deze lijnen wordt de overgangssnelheid aangegeven. Onder de overgangssnelheid wordt bijvoorbeeld het faaltempo of de reparatiesnelheid verstaan. In figuur 5.25 is een Markov-diagram gegeven voor een binair element, waarvan het faaltempo en de reparatiesnelheid constant zijn en waarbij na falen direct wordt overgegaan tot reparatie. Er is dus sprake van merkbaar falen.



Figuur 5.25 *Markov-diagram voor een binair element.*

Cur frame Page 126 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De kans dat in een tijdsinterval (t, t + Δt) de toestand van het element overgaat van functioneren naar falen is:

$$P_{1\to 2}(t, \Delta t) = P_1(t)\lambda\Delta t \tag{5.94}$$

waarin:

$P_1(t)$ is de kans dat het element op tijdstip t zich in toestand 1 bevindt;
$\lambda\Delta t$ is de kans dat het element in het interval (t, t + Δt) overgaat van toestand 1 naar toestand 2, onder de voorwaarde dat het element op tijdstip t zich in toestand 1 bevindt.

De verandering van de kans op toestand 1 of toestand 2 in een interval met tijdsduur dt is:

$$\begin{aligned} dP_1(t) &= -\lambda dt P_1(t) + \frac{1}{\Theta} dt P_2(t) \\ dP_2(t) &= +\lambda dt P_1(t) - \frac{1}{\Theta} dt P_2(t) \end{aligned} \tag{5.95}$$

Delen door dt geeft twee gekoppelde eerste-orde lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1(t)}{dt} &= -\lambda P_1(t) + \frac{1}{\Theta} P_2(t) \\ \frac{dP_2(t)}{dt} &= +\lambda P_1(t) - \frac{1}{\Theta} P_2(t) \end{aligned} \tag{5.96}$$

De randvoorwaarde voor de oplossing van deze differentiaalvergelijkingen is:

$$P_1(t) + P_2(t) = 1 \tag{5.97}$$

Substitutie van de randvoorwaarde in vergelijking (5.96) geeft:

$$\frac{dP_2(t)}{dt} + \left(\lambda + \frac{1}{\Theta}\right) P_2(t) = \lambda \tag{5.98}$$

Stel dat het op tijdstip t = 0 zeker is dat het element zich in toestand 1 bevindt, dan is de beginvoorwaarde $P_2(0) = 0$. Met deze beginvoorwaarde luidt de oplossing van de differentiaalvergelijking:

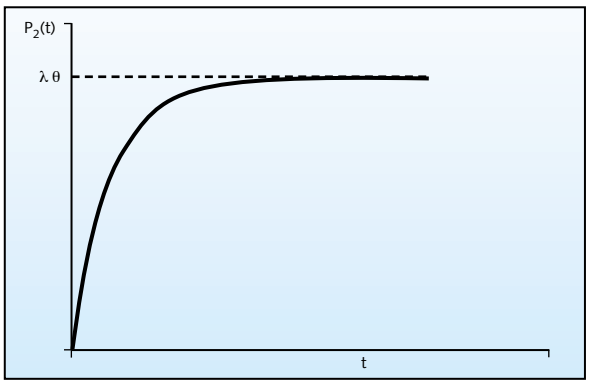
$$P_2(t) = \frac{\lambda}{\lambda + 1/\Theta}\left(1 - e^{-(\lambda + 1/\Theta)}\right) \tag{5.99}$$

Door invullen van t = ∞ wordt de zogenoemde stationaire situatie gevonden. Deze luidt:

$$P_2(\infty) = \frac{\lambda}{\lambda + 1/\Theta} \approx \lambda\Theta \tag{5.100}$$

Cur frame Page 127 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

In figuur 5.26 is het verloop van $P_2(t)$ en de stationaire situatie gegeven.



Figuur 5.26 *Verloop van de kans $P_2(t)$ in de tijd.*

Voor een binair element wordt de stationaire situatie van een Markov-proces, waarbij merkbaar falen optreedt, bereikt na circa driemaal de gemiddelde reparatieduur.
De stationaire situatie kan op snelle wijze ook worden gevonden door uit te gaan van de voorwaarden voor deze situatie, namelijk:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1(\infty)}{dt} &= 0 \\ \frac{dP_2(\infty)}{dt} &= 0 \end{aligned} \qquad (5.101)$$

Dit leidt tot een eenvoudig stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{aligned} -\lambda P_1(\infty) + \frac{1}{\Theta} P_2(\infty) &= 0 \\ +\lambda P_1(\infty) - \frac{1}{\Theta} P_2(\infty) &= 0 \end{aligned} \qquad (5.102)$$

De oplossing van de vergelijkingen luidt:

$$\begin{aligned} P_1(\infty) &= \frac{1/\Theta}{\lambda + 1/\Theta} = \frac{1}{\lambda\Theta + 1} \\ P_2(\infty) &= \frac{\lambda}{\lambda + 1/\Theta} = \frac{\lambda\Theta}{\lambda\Theta + 1} \end{aligned} \qquad (5.103)$$

$P_2(\infty)$ is de kans dat het element zich in de stationaire situatie in toestand 2 bevindt. Dit is ook te interpreteren als de fractie van de tijd dat het element niet-beschikbaar is.

5.5.6 COMBINATIES VAN TIJDSAFHANKELIJKE BELASTINGEN

In veel gevallen komen in een betrouwbaarheidsfunctie verschillende belastingen voor. Als het gaat om onafhankelijke belastingen die variëren in de tijd, behoeven de maxima van de verschillende belastingen niet

Cur frame Page 128 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

tegelijk op te treden. In zo'n geval moeten eerst de belastingen worden gesommeerd alvorens de extreme waarde verdeling van de belasting wordt bepaald, waarmee de faalkansberekening wordt gemaakt.

VOORBEELD 5.8

De betrouwbaarheidsfunctie van een element in een eenheidsperiode is: $Z = R - S_1 - S_2$.
De momentane waarden van S_1 en S_2 zijn normaal verdeeld, met:

$$\mu_{S_1} = 10 \quad \text{en} \quad \sigma_{S_1} = 2$$
$$\mu_{S_2} = 2 \quad \text{en} \quad \sigma_{S_2} = 1$$

Gevraagd wordt om de verdeling te bepalen voor de som van de belastingen, waarmee de faalkans in 100 tijdseenheden kan worden bepaald.
De momentane waarde van de som van de belastingen is normaal verdeeld met:

$$\mu_S = \mu_{S_1} + \mu_{S_2} = 12$$
$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2} = \sqrt{5}$$

De kansverdeling van de extreme waarde van de som van de belasting in een periode van 100 tijdseenheden is (zie ook 2.5):

$$F_{S_{100}^{100}}(S) = \left(\Phi\left(\frac{S-12}{\sqrt{5}}\right)\right)^{100}$$

De kansdichtheidsfunctie van de extreme waarde van de som van de belastingen is:

$$f_{S_{100}^{100}}(S) = \frac{100}{\sqrt{10\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{S-12}{\sqrt{5}}\right)^2\right)\left(\Phi\left(\frac{S-12}{\sqrt{5}}\right)\right)^{99}$$

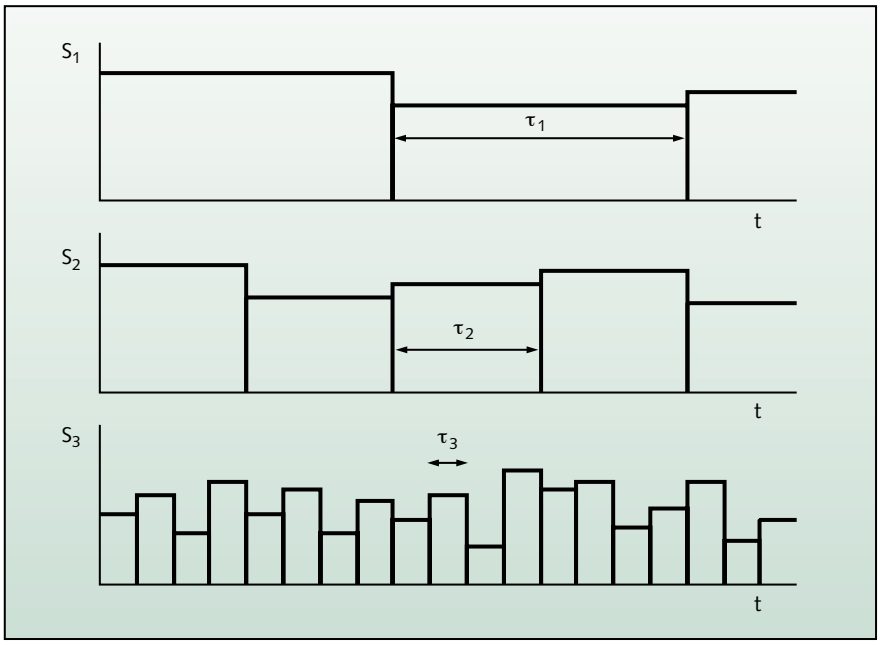
In het algemeen is het bepalen van de kansverdeling van de som van de belastingen minder eenvoudig dan in het voorgaande voorbeeld. Dit is te wijten aan het feit dat de momentane verdeling van de belastingen doorgaans niet normaal zijn. Ook komt het voor dat de bekende verdelingen van de verschillende belastingen dikwijls betrekking hebben op verschillende perioden.
Een praktische oplossing voor het bepalen van de faalkans van een element, dat aan verschillende in de tijd variërende belastingen wordt onderworpen, wordt gegeven door de Turkstra-regel [5.8]. Volgens deze regel wordt de extreme waarde van één van de belastingen gecombineerd met de momentane waarden van de overige belastingen. Op deze wijze wordt voor elke combinatie de faalkans uitgerekend en wordt de combinatie met de grootste faalkans maatgevend geacht.
Met deze methode wordt de faalkans iets onderschat.
Met het belastingmodel van Ferry Borges en Castanheta [5.9] kan op een wat meer genuanceerde wijze worden omgegaan met belastingcombinaties.

Cur frame Page 129 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Dit belastingmodel gaat ervan uit dat elke belasting S_i gedurende een bepaald eenheidsinterval τ_i constant is. Gedurende de referentieperiode T, waarvoor de faalkans wordt berekend, treden n_i belastingherhalingen op. Dit aantal bedraagt:

$$n_i = \frac{T}{\sigma_i} \tag{5.104}$$

Het aantal belastingherhalingen is niet voor alle belastingen gelijk. De belastingen worden zodanig gerangschikt dat geldt $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_i \leq \ldots \leq n_m$. Verder moet gelden dat n_i/n_{i-1} een positief natuurlijk getal is. In figuur 5.27 is een voorbeeld gegeven van belastingen volgens dit model.



Figuur 5.27 *Schematisatie van in de tijd variërende belasting.*

De bepaling van de combinaties gaat als volgt:

Maak alle mogelijke combinaties van volgorde van de belastingen. Bij m belastingen zijn er m! combinaties mogelijk. Voor de eerste belasting in de combinatie wordt de extreme waarde van het aantal belastingherhalingen in periode T in rekening gebracht. Voor elke volgende belasting in de combinatie moet worden nagegaan hoeveel belastingherhalingen er mogelijk zijn in het eenheidsinterval van de voorgaande belasting en moet daarvoor de extreme waarde verdeling worden bepaald.

Cur frame Page 130 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

VOORBEELD 5.9

Bepaal de belastingcombinaties van de drie onafhankelijk in de tijd variërende belastingen van figuur 5.27. In totaal zijn er 6 combinaties mogelijk, te weten:
combinatie 1: S_1 S_2 S_3
combinatie 2: S_1 S_3 S_2
combinatie 3: S_2 S_1 S_3
combinatie 4: S_3 S_1 S_2
combinatie 5: S_2 S_3 S_1
combinatie 6: S_3 S_2 S_1

Omdat $\tau_1 \geq \tau_2$ zijn de combinaties 3 en 5 gelijk en omdat tevens $\tau_2 \geq \tau_3$ zijn de combinaties 4 en 6 ook gelijk. Er blijven dus vier combinaties over.
Voor deze combinaties geldt de redenering:

combinatie 1: In de referentieperiode T zijn n_1 belastingherhalingen van belasting S_1 mogelijk. In het eenheidsinterval τ_1 kunnen nog n_2/n_1 belastingherhalingen optreden van belasting S_2. Vervolgens is het mogelijk dat in het eenheidsinterval τ_2 nog n_3/n_2 belastingherhalingen optreden van belasting S_3.

combinatie 2: Ook bij deze combinatie zijn n_1 belastingherhalingen van belasting S_1 mogelijk. In het eenheidsinterval τ_1 kunnen nog n_3/n_1 belastingherhalingen optreden van belasting S_3. In τ_3 zijn geen belastingherhalingen meer mogelijk van S_2.

combinatie 3: In de referentieperiode T zijn n_2 belastingherhalingen van belasting S_2 mogelijk. In het eenheidsinterval τ_2 kunnen nog n_3/n_2 belastingherhalingen optreden van belasting S_3, maar zijn geen belastingherhalingen meer mogelijk van S_1.

combinatie 4: In deze combinatie zijn n_3 belastingherhalingen van belasting S_3 mogelijk. In het eenheidsinterval τ_3 kunnen geen belastingherhalingen optreden van belasting S_1 en S_2.

De belastingcombinaties met het aantal belastingherhalingen die in rekening moeten worden gebracht zijn gegeven in tabel 5.6.

Tabel 5.6 *Belastingcombinaties.*

		aantal belastingherhalingen		
	combinatie	S_1	S_2	S_3
	1	n_1	n_2/n_1	n_3/n_2
	2	n_1	1	n_3/n_1
	3	1	n_2	n_3/n_2
	4	1	1	n_3

Cur frame Page 131 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

5.6 STERKTEBEREKENING MET NIVEAU I METHODE

5.6.1 PRINCIPE VAN DE NIVEAU I METHODE

In 5.2 en 5.3 is nader ingegaan op het bepalen van de faalkans van een element, en daarmee de betrouwbaarheid, bij gegeven sterkte en belasting. In de praktijk doet zich dikwijls het probleem voor dat de sterkte niet bekend is, maar dat deze juist moet worden bepaald bij een gegeven betrouwbaarheid. Het bepalen van de benodigde sterkte kan gebeuren met behulp zowel van de niveau III als de niveau II methoden door iteratief de sterkte in de berekening aan te passen, totdat een voldoende kleine faalkans wordt gevonden.
De meest gangbare manier van ontwerpen is met behulp van de voorschriften of richtlijnen. De essentie van de normen is dat een bepaalde representatieve waarde van de sterkte wordt gedeeld door een factor en dat de representatieve waarde van de belasting wordt vermenigvuldigd met een factor, waarbij moet gelden:

$$\frac{R_{rep}}{\gamma_R} > \gamma_S S_{rep} \tag{5.105}$$

De factoren γ_R en γ_S zijn bekend als partiële veiligheidsfactoren. De representatieve waarden van de sterkte en de belasting worden in het algemeen berekend met:

$$\begin{aligned} R_{rep} &= \mu_R + k_R\sigma_R \\ S_{rep} &= \mu_S + k_S\sigma_S \end{aligned} \tag{5.106}$$

waarin k_R negatief en k_S positief of negatief kan zijn.

5.6.2 KOPPELING VAN DE NIVEAU I METHODE AAN DE FAALKANSBEREKENING

De normen geven waarden van partiële veiligheidsfactoren voor de meest gangbare sterkte- en belastingparameters. Voor het bepalen van deze waarden is in de meest recente richtlijnen aansluiting gezocht met de probabilistische ontwerpmethoden met behulp van de niveau II faalkansberekening. De aansluiting is gevonden in de definitie van het ontwerppunt. Het ontwerppunt is het punt in de faalruimte met de grootste gezamenlijke kansdichtheid van de sterkte en de belasting. Het is daarom aannemelijk dat bij falen de waarden van de sterkte en de belasting dicht bij de waarden van het ontwerppunt liggen. Deze waarden bedragen:

$$\begin{aligned} R^* &= \mu_R + \alpha_R\beta\sigma_R = \mu_R(1 + \alpha_R\beta V_R) \\ S^* &= \mu_S + \alpha_S\beta\sigma_S = \mu_S(1 + \alpha_S\beta V_S) \end{aligned} \tag{5.107}$$

Als ontwerpeis is het veilig om aan te houden:

$$R^* > S^* \tag{5.108}$$

Gelijkstelling van de vergelijkingen (5.108) en (5.105) resulteert in een aantal vergelijkingen voor de partiële veiligheidsfactoren, te weten:

$$\begin{aligned} \gamma_R &= \frac{R_{rep}}{R^*} = \frac{1 + k_R V_R}{1 + \alpha_R\beta V_R} \\ \gamma_S &= \frac{S^*}{S_{rep}} = \frac{1 + \alpha_S\beta V_S}{1 + k_S V_S} \end{aligned} \tag{5.109}$$

Cur frame Page 132 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

In het algemeen zal een partiële factor γ_i groter zijn naarmate:

a. de absolute waarde van de invloedscoëfficiënt α_i groter is;
b. de gewenste betrouwbaarheidsindex β hoger ligt;
c. de variatiecoëfficiënt V_i groter is.

Omdat in de definitie van γ_R de invloedscoëfficiënt een belangrijke rol speelt, is de partiële veiligheidsfactor voor de sterkte afhankelijk van de spreidingen in zowel de sterkte als de belastingen, immers:

$$\alpha_R = -\frac{\sigma_R}{\sigma_Z} = -\frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \tag{5.110}$$

Hetzelfde geldt voor de partiële factor voor de belasting. Dit kan het beste worden gedemonstreerd met een voorbeeld.

VOORBEELD 5.10

Stel dat gegeven is dat zowel de sterkte als de belasting normaal verdeeld zijn, met:

S: $\mu_S = 10$ en $V_S = 0{,}5$ dus $\sigma_S = 5$
R: $V_R = 0{,}2$

Gevraagd wordt om de partiële veiligheidsfactor voor de sterkte te bepalen met een betrouwbaarheidscoëfficiënt $\beta = 3{,}6$ en $k_R = -1{,}64$ (5 % onderschrijding).
De invloedscoëfficiënten bedragen:

$$\alpha_R = -\frac{0{,}2\,\mu_R}{\sqrt{0{,}04\,\mu_R^2 + 25}} \quad \text{en} \quad \alpha_S = \frac{5}{\sqrt{0{,}04\,\mu_R^2 + 25}}$$

Het ontwerppunt wordt gegeven door:

$$R^* = \mu_R - \frac{0{,}04\,\mu_R^2}{\sqrt{0{,}04\,\mu_R^2 + 25}} \cdot 3{,}6 \quad \text{en} \quad S^* = 10 + \frac{25}{\sqrt{0{,}04\,\mu_R^2 + 25}} 3{,}6$$

Uit $R^* - S^* = 0$ volgt:

$$\mu_R - 10 - \sqrt{0{,}04\,\mu_R^2 + 25} \cdot 3{,}6 = 0$$

Oplossen van deze vergelijking geeft: $\mu_R = 51$.
De ontwerppuntwaarde van de sterkte is $R^* = 18{,}0$ en de representatieve waarde bedraagt $R_{rep} = 34{,}2$.
De partiële veiligheidsfactor voor de sterkte bedraagt dus $\gamma_R = 34{,}3/18{,}0 = 1{,}9$.

Als de spreiding in de belasting groter is, zal de vereiste sterkte veranderen.

Cur frame Page 133 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Stel $\sigma_S = 2$, dan moet gelden:

$$\mu_R - 10 - \sqrt{0{,}04 - \mu_R^2 + 4} \cdot 3{,}6 = 0 \rightarrow \mu_R = 39{,}0$$

De partiële veiligheidsfactor voor de sterkte bedraagt in dit geval:

$$\gamma_R = \frac{26{,}2}{11{,}8} = 2{,}2$$

Met behulp van de niveau II of niveau III methoden voor de bepaling van het ontwerppunt is het dus mogelijk om voor alle basisvariabelen een partiële veiligheidsfactor te bepalen.

VOORBEELD 5.11

Stel dat voor het probleem van voorbeeld 5.2 de betrouwbaarheidsindex $\beta = 2{,}39$ gewenst is en dat de representatieve waarden van de basisvariabelen gelijk zijn aan de verwachtingswaarden, dan zijn de partiële veiligheidsfactoren:

$$\gamma_a = \frac{\mu_a}{a^*} = \frac{8}{7{,}04} = 1{,}14$$

$$\gamma_b = \frac{\mu_b}{b^*} = \frac{3}{0{,}75} = 4{,}00$$

$$\gamma_a = \frac{c^*}{\mu_c^*} = \frac{5{,}29}{4} = 1{,}32$$

Voor de praktische uitwerking moet met een aantal complicaties rekening worden gehouden. Hiervoor is een aantal algemeen geaccepteerde regels ontwikkeld, die gezamenlijk een „code theorie" vormen. Twee van deze complicaties zijn:

1. Als voor elke stochastische variabele een partiële veiligheidsfactor wordt gedefinieerd, wordt het aantal factoren veel te groot. Het totale aantal factoren moet worden beperkt door variabelen samen te nemen en daarvoor één partiële veiligheidsfactor te berekenen.
2. De grootte van de partiële veiligheidsfactoren is afhankelijk van de standaardafwijking van alle in een betrouwbaarheidsfunctie voorkomende basisvariabelen. Het is daarom niet mogelijk om een veiligheidsfactor te bepalen voor een basisvariabele, die onafhankelijk is van de betrouwbaarheidsfunctie. De factoren uit de voorschriften zijn daarom gemiddelden van een groot aantal referentiegevallen.

De huidige Nederlandse Technische Grondslagen voor Bouwconstructies (TGB) zijn gebaseerd op een groot aantal niveau II berekeningen van referentiegevallen. Uit deze referentiegevallen zijn gemiddelde waarden bepaald voor partiële veiligheidsfactoren voor diverse sterkte- en belastingparameters.
De partiële veiligheidsfactoren volgens de Eurocode, die probabilistisch zijn onderbouwd, zijn op een andere wijze bepaald. Deze zijn namelijk gebaseerd op een standaardisatie van de α_x-waarden ten behoeve van het bepalen van de ontwerppuntwaarden.

Cur frame Page 134 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

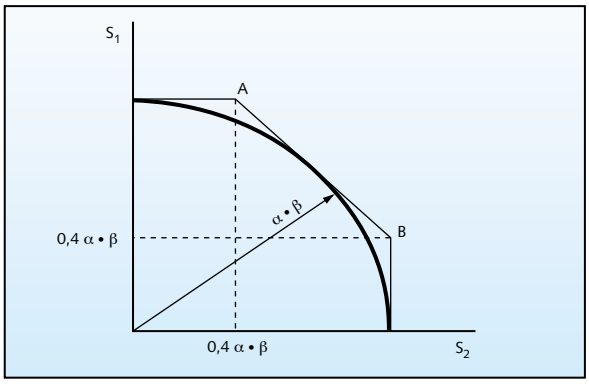
5.6.3 STANDAARDISATIE VAN DE α-WAARDEN

De waarden van α dienen in principe te worden bepaald met behulp van een faalkansberekening. De meest geëigende methode hiervoor is de niveau II methode. Met behulp van de niveau III methoden is het echter ook mogelijk om de α-waarden te berekenen (zie bijlage G).
De kern van de niveau I ontwerpmethode, volgens de Eurocode, is dat de α-waarden zijn gestandaardiseerd en onafhankelijk worden beschouwd van een willekeurig specifiek geval. De gestandaardiseerde α-waarden kunnen worden verkregen door voor een aantal referentiegevallen faalkansberekeningen te maken. Van de berekende α-waarden kan vervolgens een gewogen gemiddelde worden bepaald onder de voorwaarde dat de fout in de resulterende faalkansen wordt geminimaliseerd.
Voor bouwconstructies wordt de verdeling van α-waarden uit tabel 5.7 toegepast.

Tabel 5.7 *Gestandaardiseerde α-waarden voor bouwconstructies.*

	variabele	α
	dominante sterkteparameter	0,80
	overige sterkteparameter	0,32
	dominante belastingparameter	0,70
	overige belastingparameter	0,28

Op voorhand is het meestal niet mogelijk om van een aantal belastingparameters de dominante aan te wijzen. Daarom wordt afwisselend één van de parameters als dominant beschouwd. Dit resulteert in een aantal belastinggevallen met telkens een andere dominante belastingparameter. De verschillende belastinggevallen sluiten elkaar uit. Het ontwerppunt volgt uit het maatgevende belastinggeval.
De verhouding van 40 % tussen de dominante en de overige parameters is in figuur 5.28 gedemonstreerd voor het geval met twee parameters. Als de betrouwbaarheidsfunctie lineair is en de betrouwbaarheidsindex groter moet zijn dan $\alpha \cdot \beta$, voldoen alle parametercombinaties buiten de cirkel met middelpunt (0, 0) en straal $\alpha \cdot \beta$ in figuur 5.28. Met behulp van de controlepunten A en B wordt als het ware een omhullende aan deze cirkel bepaald.
De theorie met de gestandaardiseerde α-waarden is de basis van de bepaling van de partiële veiligheids-cofficiënten volgens de Eurocode.



Figuur 5.28 *Controlepunten, combinaties van twee parameters.*

Cur frame Page 135 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

5.6.4 BELASTINGCOMBINATIES BIJ NIVEAU I STERKTEBEREKENING

In 5.6.3 is reeds aan de orde geweest dat het gebruik van gestandaardiseerde α-waarden volgens de Eurocode kan leiden tot een aantal belastinggevallen. Voor elke mogelijke dominante belastingparameter moet een belastinggeval worden beschouwd, waarbij de overige belastingen als niet-dominant in rekening worden gebracht.
Daarnaast zal eventuele tijdsafhankelijkheid van de belastingparameter ook nog aanleiding geven tot het beschouwen van meer belastingcombinaties.
Met behulp van het model van Ferry Borges-Castanheta kunnen de verschillende belastingcombinaties worden bepaald. Bij de toepassing van de niveau I berekening is het echter niet wenselijk om rekening te houden met verschillende verdelingen voor één parameter. Doorgaans wordt uitgegaan van een extreme waarde verdeling voor een bepaalde ontwerpperiode.
De ontwerpperiode kan worden opgedeeld in m perioden $\Delta T = \max \tau_i$ (zie fig. 5.27). Onder de veronderstelling dat de belastingen in de verschillende perioden ΔT onafhankelijk zijn, geldt voor de faalkans in een periode ΔT:

$$P'_f = \frac{P_f}{m} \tag{5.111}$$

waarin:

P'_f is de faalkans in periode ΔT;
P_f is de kans op falen in de ontwerpperiode;
$m = T/\Delta T$;
T is de ontwerpperiode.

De gewogen betrouwbaarheidsindex voor de belastingen over de periode ΔT bedraagt:

$$\alpha_S\beta' = -\Phi^{-1}\left(\frac{\Phi(\alpha_S\beta)}{m}\right) \tag{5.112}$$

Voor het ontwerppunt gelden de voorwaarden:

$$\text{voor de dominante belasting: } P(S_1 > S_1^*) = \Phi(-\alpha_S\beta') = \frac{\Phi(-\alpha_S\beta)}{m}$$

$$\text{voor de overige belastingen: } P(S_i > S_i^*) = \Phi(-0{,}4\,\alpha_S\beta') = \Phi\left(0{,}4\,\Phi^{-1}\left(\frac{\Phi(-\alpha_S\beta)}{m}\right)\right) \tag{5.113}$$

Uitgaande van de ontwerpperiode moet gelden:

$$\text{voor de dominante belasting: } P(S_1 > S_1^*) = m\Phi(-\alpha_S\beta') = \Phi(-\alpha_S\beta)$$
$$\text{voor de overige belastingen: } P(S_i > S_i^*) = m\Phi(-0{,}4\,\alpha_S\beta') \tag{5.114}$$

Cur frame Page 136 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De normale verdeling kan redelijk worden benaderd met:

$$\Phi(-x) = 10^{-x} \text{ voor } 3 < x < 4 \tag{5.115}$$

Substitutie van de vergelijkingen (5.114) in de vergelijking (5.115) en enig herschrijven geeft de ontwerppuntwaarden van de belastingen:

$$\text{voor de dominante belasting: } S_1^* = \mu_1 + \alpha_S \beta \sigma_1$$
$$\text{voor de overige belastingen: } S_i^* = \mu_i + (0{,}4\,\alpha_S \beta - 0{,}6 \log m)\sigma_i \tag{5.116}$$

waarin:

μ_i is de verwachtingswaarde van de extreme waarde van S_i in de ontwerpperiode;
σ_i is de standaardafwijking van de extreme waarde van S_i in de ontwerpperiode.

De partiële belastingfactoren worden bepaald door:

$$\text{voor de dominante belasting: } \gamma_1 = \frac{\mu_1 + \alpha_S \beta \sigma_1}{S_{1,\,rep}}$$
$$\text{voor de overige belastingen: } \gamma_i = \frac{\mu_i + (0{,}4\,\alpha_S \beta - 0{,}6 \log m)\sigma_i}{S_{i,\,rep}} \tag{5.117}$$

waarin:

$S_{i,rep}$ is de representatieve waarde van S_i, $S_{i,rep} = \mu_i + k\sigma_i$.

De huidige Nederlandse Technische Grondslagen voor Bouwconstructies (TGB) maken geen gebruik van de gestandaardiseerde α-waarden. De partiële veiligheidscoëfficiënten zijn bepaald aan de hand van een groot aantal niveau II berekeningen voor de verschillende belastinggevallen. De belastingcombinaties volgens de TGB zijn samengesteld met de Turkstra-regel. De algemene gedaante voor de belastingcombinaties van in de tijd variërende belastingen volgens de TGB is:

$$S = \gamma_1 S_{1,\,rep} + \sum_{i=2}^{n} \gamma_i S_{i,\,rep} \tag{5.118}$$

waarin:

$S_{1,rep}$ is de representatieve extreme waarde van de belasting S_1;
$S_{i,rep}$ is de representatieve momentane waarde van de belasting S_i;
n is het aantal belastingparameters of het aantal belastinggevallen.

In vergelijking (5.118) moeten alle parameters eenmaal als extreme waarde worden ingevoerd. Dit resulteert in n belastingcombinaties. De maatgevende combinatie wordt in rekening gebracht.

Cur frame Page 137 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

LITERATUUR

Aanbevolen literatuur:

5.1. Joint Committte on Structural Safety, General principles on reliability for structural design. International Association for Bridge and Structural Engineering, 1981.

5.2. GENZ, A.C. en A.A. MALIK, Remarks on Algorithm 006: An Adaptive Algorithm for Numerical Integration on N-Dimensional Rectangular Region, J.Comp.Appl.Math., Vol 6, No. 4, 1980.

5.3. OUYPORNPRASERT, W., Adaptive numerical integration for reliability analysis. Universität Innsbruck, Institut für Mechanik, Innsbruck, 1987.

5.4. BUCHER, C.G., Adaptive sampling – An iterative fast Monte-Carlo procedure. Universität Innsbruck, Institut für Mechanik, Innsbruck, 1987.

5.5. HASOFER, A.M. en N. LIND, An exact and invariant first order reliability format. Proceedings of the ASCE, Journal of Engineering Mechanics Division, 1974.

5.6. RACKWITZ, R. en B. FIESSLER, An algorithm for calculation of structural reliability under combined loading. Berichter zur Sicherheitstheorie der Bauwerke, Lab. für Konstr. Ingb., München, 1977.

5.7. KUIJPER, H.K.T., Onderhoud in de waterbouw, economisch verantwoord plannen van onderhoud. Technische Universiteit Delft, Delft, 1992.

5.8. TURKSTRA, C.J. en H.O. MADSEN, Load combinations in codified structural design. Journal of Engineering Structural Division., ASCE, Volume 106, nr. St. 12, december 1980.

5.9. FERRY BORGES, J. en M. CASTANHETA, Structural safety – 2nd edition. Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, Lissabon, 1972.

Geraadpleegde literatuur:

5.10. CORNELL, C.A., A probability-based structural code. ACI-Journal, Volume 66, 1969.

5.11. DITLEVSEN, 0., Fundamentals of second moment structural reliability theorie. International Research Seminar on Safety of Structures, Trondheim, 1977.

5.12. THOFT-CHRISTENSEN, P. en M.J. BAKER, Structural reliability theorie and its applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, maart 1982.

5.13. TURKSTRA, C.J., Application of Bayesian decision theorie. Study nr. 3: Structural reliability and codified design. Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo, 1970.

5.14. VROUWENVELDER, A.C.W.M. en J.K. VRIJLING, Probabilistisch ontwerpen. Technische Universiteit Delft, Faculteit der Civiele Techniek, Delft, september 1987.

Cur frame Page 138 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Instorten van een deel van de Merwedekade in Dordrecht (7-7-'80).

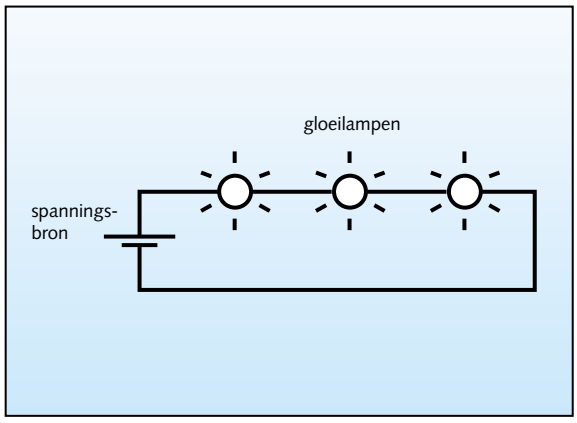
Cur frame Page 139 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Hoofdstuk 6: Betrouwbaarheid van systemen

6.1 INLEIDING BETROUWBAARHEID VAN SYSTEMEN

Voordat over betrouwbaarheid van een systeem kan worden gesproken, moet duidelijk zijn wat onder een systeem moet worden verstaan. Een systeem kan worden gedefinieerd als: „een groep elementen of processen met een gezamenlijk doel".

De elementen en processen hebben onderlinge relaties en hebben ook relaties met elementen en processen buiten het systeem.
In hoofdstuk 5 is de betrouwbaarheid en de faalkans van een element aan de orde geweest. Over het algemeen heeft de risico-analist te maken met systemen, die bestaan uit één of meer configuraties van elementen. Een goed voorbeeld van zo'n configuratie is het in figuur 6.1 gegeven verlichtingssysteem (kerstboomverlichting). In de elektronica is een dergelijk systeem bekend als een seriesysteem. Als één gloeilamp doorbrandt, werkt het hele systeem niet meer.

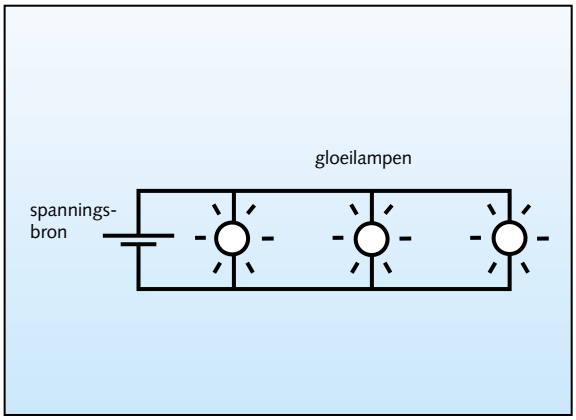


Figuur 6.1 *Serieschakeling van gloeilampen.*

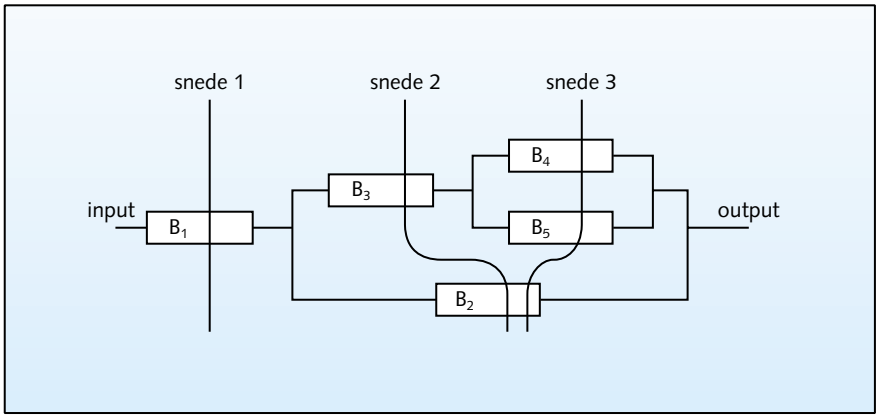
In figuur 6.2 is een andere bekende configuratie van verlichtingselementen gegeven, die bijvoorbeeld wordt toegepast bij kantoorverlichting. Dit systeem is het zogenoemde parallelsysteem. Als bij een dergelijk systeem een gloeilamp doorbrandt, wordt de keten niet onderbroken en blijven de andere lampen branden.
In andere vakgebieden komen overeenkomstige systemen voor. Een systeem kan worden gevormd door een configuratie van fysische componenten of processen, maar ook door een aantal bezwijkvormen of door een combinatie van bezwijkvormen en een configuratie van componenten.
Met behulp van een analyse van de werking van een systeem kan de kleinste verzameling van gebeurtenissen, waarbij falen van het systeem optreedt, worden gezocht. Deze verzameling wordt de verzameling van de minimale sneden genoemd. In figuur 6.3 is een combinatie van parallel- en seriesystemen met de minimale sneden getekend. Als alle componenten in een minimale snede falen, faalt het systeem.
Doorgaans zal een systeem zijn onder te verdelen in een aantal subsystemen. Een goede analyse van de werking van het systeem en de subsystemen is van groot belang bij een risico-analyse. In 6.3 zijn enkele technieken beschreven, die kunnen worden gebruikt bij de analyse van een systeem.

Cur frame Page 140 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De betrouwbaarheid van een systeem is de mate, waarin een systeem aan de eisen voldoet. Op basis van het voorgaande wordt de betrouwbaarheid van een systeem dus bepaald door de betrouwbaarheid van de elementen en door de relaties tussen die elementen.



Figuur 6.2 *Parallelschakeling van gloeilampen.*



Figuur 6.3 *Minimale sneden.*

6.2 FAALKANSBEREKENING VAN EENVOUDIGE SYSTEMEN

6.2.1 FAALKANS VAN HET SERIESYSTEEM

Omwille van de eenvoud is het verstandig om eerst een seriesysteem te beschouwen met twee elementen. Stel dat een verlichtingssysteem bestaande uit een lichtschakelaar en een gloeilamp functioneert als de gloeilamp en de schakelaar functioneren. Effecten zoals het functioneren van de spanningsbron en van de elektriciteitskabel worden buiten beschouwing gelaten.
Er kunnen twee gebeurtenissen leiden tot falen:

E_1 = de gloeilamp functioneert niet;
E_2 = de schakelaar functioneert niet.

Cur frame Page 141 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

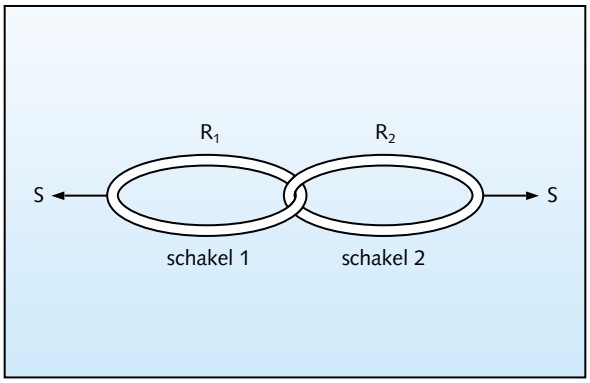
In bijlage A is de kans op het optreden van minstens één van twee gebeurtenissen gedefinieerd. De kans op gebeurtenis E_1 of gebeurtenis E_2 is:

$$\begin{aligned} P_f &= P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \\ &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1)P(E_2|E_1) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Uit deze vergelijking blijkt dat de faalkans van het systeem niet alleen een functie is van de individuele faalkansen van de elementen, maar ook van een voorwaardelijke kans. De stochastische afhankelijkheid van het falen van de elementen is dus van belang.
Als de faalmechanismen, zoals in dit geval, stochastisch onafhankelijk zijn, dan is de faalkans:

$$P_f = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1)P(E_2) \tag{6.2}$$

Minder eenvoudig wordt het als de gebeurtenissen niet onafhankelijk zijn.
Als voorbeeld kan een ketting van 2 schakels worden genomen, die wordt onderworpen aan een belasting S (zie fig. 6.4). De ketting faalt als minstens één schakel breekt.



Figuur 6.4 *Ketting met twee schakels.*

In dit voorbeeld komt de stochastische afhankelijkheid voornamelijk voort uit dezelfde belasting en wellicht uit een relatie met betrekking tot de sterkte-eigenschappen (productieproces, materiaal, afmetingen enz.).
De faalruimte van het systeem wordt gedefinieerd door:

$$(R_1 < S) \cup (R_2 < S) \tag{6.3}$$

Met behulp van numerieke integratie of simulatie met de Monte Carlo methode is de faalkans van het systeem direct te bepalen (zie ook hoofdstuk 5). In het geval dat de faalkans wordt berekend met een niveau II methode, moet de faalkans worden bepaald aan de hand van de faalkansen van de elementen van het systeem.
Voor elke schakel is de faalkans te bepalen met:

$$P(E_i) = P(R_i < S) \tag{6.4}$$

Cur frame Page 142 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Als de gebeurtenissen E_1 en E_2 elkaar uitsluiten, reduceert vergelijking (6.1) tot:

$$P_f = P(E_1) + P(E_2) \tag{6.5}$$

In het geval dat het falen van het ene element tevens het falen van het andere impliceert, geldt:

$$P(E_1)P(E_2|E_1) = P(E_2)P(E_1|E_2) = \min\Big(P(E_1), P(E_2)\Big) \tag{6.6}$$

De faalkans is in dit geval:

$$P_f = \max\Big(P(E_1), P(E_2)\Big) \tag{6.7}$$

Voor die gevallen, waarbij de afhankelijkheid van de faalmechanismen van de elementen onbekend is, zijn de grenzen, waartussen de faalkans van het systeem ligt, gegeven door de vergelijkingen (6.5) en (6.7):

$$\max\Big(P(E_1), P(E_2)\Big) \le P_f \le P(E_1) + P(E_2) \tag{6.8}$$

Als de faalkansen $P(E_1)$ en $P(E_2)$ van dezelfde orde zijn, is de marge tussen de onder- en bovengrens eveneens van deze orde en relatief groot.
DITLEVSEN [6.1] heeft een benaderingsmethode ontwikkeld, waarmee nauwere grenzen kunnen worden berekend, waarbinnen de faalkans zal liggen. Deze methode gaat uit van een bekende correlatie tussen de faalmechanismen in de vorm van een correlatiecoëfficiënt ρ en normaal verdeelde betrouwbaarheidsfuncties. Hij heeft afgeleid dat:

$$\Phi(-\beta_1^*)\Phi(-\beta_2) \le P(E_1 \cap E_2) \le \Phi(-\beta_1)\Phi(-\beta_2^*) + \Phi(-\beta_1^*)\Phi(-\beta_2) \tag{6.9}$$

waarin:

$$\beta_i = -\Phi^{-1}(P(E_i))$$

$$\beta_1^* = \frac{\beta_2 - \rho\beta_1}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\beta_2^* = \frac{\beta_1 - \rho\beta_2}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

ρ is de correlatiecoëfficiënt tussen E_1 en E_2

Voor de faalkans van het seriesysteem met 2 elementen geldt dan dus:

$$P(E_1) + P(E_2) - P(E_1)\Phi(-\beta_2^*) - P(E_2)\Phi(-\beta_1^*) \le P_f \le P(E_1) + P(E_2) - P(E_2)\Phi(-\beta_1^*) \tag{6.10}$$

Cur frame Page 143 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De methode van Ditlevsen sluit goed aan bij de niveau II faalkansberekeningen, waarbij de correlatiecoëfficiënt kan worden berekend met:

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}\alpha_{2i}\rho_i \tag{6.11}$$

waarin:

α_{1i} is de α-waarde voor X_i, volgend uit de niveau II berekening van $Z_1 < 0$;
α_{2i} is de α-waarde voor X_i, volgend uit de niveau II berekening van $Z_2 < 0$;
ρ_i is de correlatie van de X_i in het mechanisme E_1 en de X_i in het mechanisme E_2;
n is het aantal basisvariabelen.

Bij een seriesysteem met n elementen is de faalruimte gedefinieerd door:

$$R_1 < S_1 \cup R_2 < S_2 \cup R_3 < S_3 \cup \ldots \cup R_n < S_n \tag{6.12}$$

De faalkansberekening met behulp van niveau III methoden, bij een systeem met n elementen, is in principe niet anders dan bij een systeem met twee elementen. De hoeveelheid rekenwerk neemt wel toe. Bij het toepassen van niveau II technieken voor het berekenen van de faalkansen van de elementen worden de grenzen voor de faalkans van het seriesysteem met n elementen gegeven door:

$$\max\Big(P(R_i < S_i)\Big) \le P_f \le \sum_{i=1}^{n} P(R_i < S_i) \tag{6.13}$$

Deze grenzen zijn dikwijls nogal ruim. Ditlevsen heeft ook voor n elementen een minder ruime formulering van de grenzen opgesteld. Deze luidt:

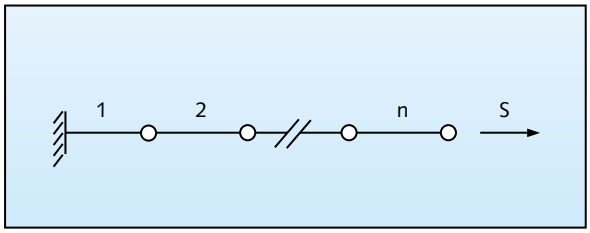
$$\begin{aligned} &P(R_1 < S_1) + \sum_{i=2}^{n} \max\left[\left(P(R_i < S_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(R_i < S_i \cap R_j < S_j)\right), 0\right] \le P_f \\ &P_f \le \sum_{i=1}^{n} P(R_i < S_i) - \max_{j<i} P(R_i < S_i \cap R_j < S_j) \end{aligned} \tag{6.14}$$

Het verschil tussen de vergelijkingen (6.13) en (6.14) kan het beste worden gedemonstreerd aan de hand van een voorbeeld.

VOORBEELD 6.1

Gegeven is een seriesysteem volgens figuur 6.5 met n elementen. De belasting op alle elementen is exact hetzelfde en wordt normaal verdeeld verondersteld. De sterkte van de elementen is stochastisch en normaal verdeeld. De sterkte van de verschillende elementen wordt gecorreleerd verondersteld.

Cur frame Page 144 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 6.5 *Seriesysteem van trekstaven.*

Aangenomen wordt een gelijke correlatie tussen de sterkte van alle elementen met een correlatiecoëfficiënt $\rho = 0{,}7$. De parameters van de verdeling van de sterkte en de belasting zijn:

$$\mu_{R_i} = 280 \quad \sigma_{R_i} = 20 \quad \rho_{R_i} = 0{,}7$$
$$\mu_{S_i} = 160 \quad \sigma_{S_i} = 20 \quad \rho_{S_i} = 1{,}0$$

Gevraagd wordt de onder- en bovengrens volgens Ditlevsen en de elementaire onder- en bovengrens voor de faalkans voor een systeem van 2 tot 10 elementen.
Het falen van een enkel element volgt uit:

$$\mu_{Z_i} = \mu_{R_i} - \mu_{S_i} = 280 - 160 = 120$$
$$\sigma_{Z_i} = \sqrt{\sigma_{R_i}^2 + \sigma_{S_i}^2} = 28{,}28$$
$$\beta_i = \frac{\mu_{Z_i}}{\sigma_{Z_i}} = 4{,}24$$
$$P_{f_i} = \Phi(-\beta_i) = 1{,}1 \cdot 10^{-5}$$

Om de Ditlevsen-grenzen te berekenen moet eerst de correlatiecoëfficiënt tussen Z_i en Z_j worden bepaald. De algemene uitdrukking voor de covariantie is:

$$\mathrm{Cov}(Z_iZ_j) = \mathrm{Cov}(R_iR_j) - \mathrm{Cov}(R_iS_i) - \mathrm{Cov}(R_jS_j) + \mathrm{Cov}(S_iS_j)$$

Omdat de belasting en de sterkte onafhankelijk zijn geldt nu:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z_iZ_j) &= \mathrm{Cov}(R_iR_j) + \mathrm{Cov}(S_iS_j)\\ &= \rho_{R_{ij}}\sigma_{R_i}\sigma_{R_j} + \rho_{S_{ij}}\sigma_{S_i}\sigma_{S_j}\\ &= 0{,}7 \cdot 20^2 + 1{,}0 \cdot 20^2 = 680\end{aligned}$$

De correlatiecoëfficiënt $\rho_{Z_iZ_j}$ volgt dan uit:

$$\rho_{Z_iZ_j} = \frac{\mathrm{Cov}(Z_iZ_j)}{\sigma_{Z_i}\sigma_{Z_j}} = \frac{680}{28{,}28^2} = 0{,}85$$

Cur frame Page 145 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Nu de correlatiecoëfficiënt bekend is, kunnen de Ditlevsen-grenzen worden berekend. Als $\beta_i = \beta_j = \beta$ geldt volgens Ditlevsen:

$$P_{f_{ij}} = P(Z_i < 0 \cap Z_j < 0) = 2\Phi(-\beta)\Phi(-\beta^*)$$

met:

$$\beta^* = \frac{\beta - \rho_{Z_iZ_j}\beta}{\sqrt{1-\rho^2_{Z_iZ_j}}} = \frac{4{,}24 - 0{,}85 \cdot 4{,}24}{\sqrt{1-0{,}85^2}} = 1{,}21$$

$$P_{f_{ij}} = 2\Phi(-\beta)\Phi(-\beta^*) = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$$

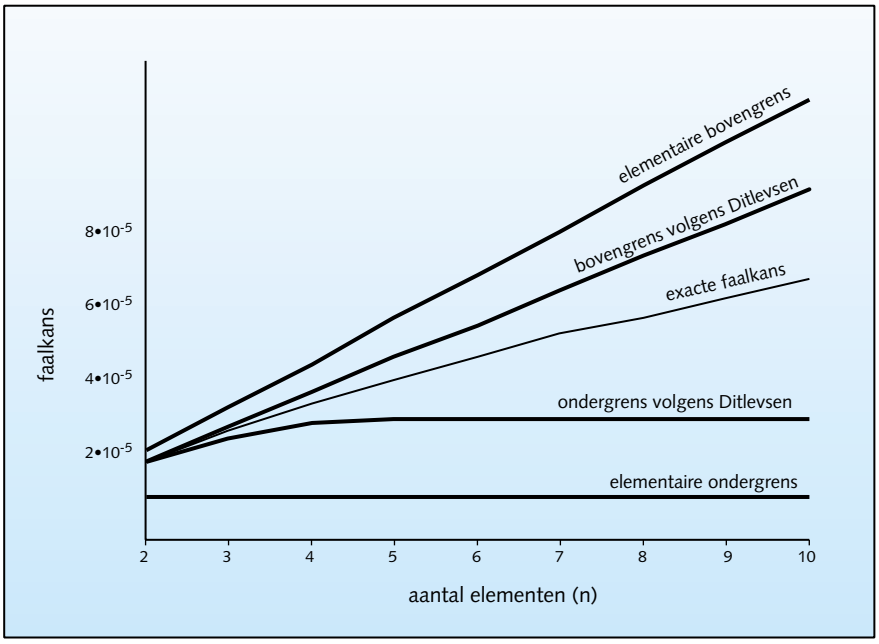
Met deze waarden voor $P_{f_{ij}}$ zijn de onder- en bovengrenzen volgens Ditlevsen berekend in tabel 6.1. De elementaire grenzen zijn $P_{f_i} \le P_f \le n\ P_{f_i}$.
In figuur 6.6 zijn naast de exacte faalkans de elementaire onder- en bovengrens (zie vergelijking (6.13)) en de nauwere grenzen volgens Ditlevsen (zie vergelijking (6.14)) weergegeven. Ter vergelijking is ook de exacte faalkans in de figuur uitgezet.

Tabel 6.1 *Onder- en bovengrenzen van de faalkans volgens Ditlevsen [6.1].*

	n	$\sum_{i=2}^{n} \max\left[P_{f_i} - \sum_{j=1}^{i-1} P_{f_{ij}}, 0\right]$	$\sum_{i=1}^{n} P_{f_i}$	$\sum_{i=1}^{n} \max_{j<1} P_{f_i}$	ondergrens	bovengrens
	2	$8{,}5 \times 10^{-6}$	$2{,}2 \times 10^{-5}$	$5{,}0 \times 10^{-6}$	$2{,}0 \times 10^{-5}$	$2{,}0 \times 10^{-5}$
	3	$1{,}5 \times 10^{-5}$	$3{,}3 \times 10^{-5}$	$7{,}5 \times 10^{-6}$	$2{,}6 \times 10^{-5}$	$2{,}8 \times 10^{-5}$
	4	$1{,}8 \times 10^{-5}$	$4{,}4 \times 10^{-5}$	$1{,}0 \times 10^{-5}$	$2{,}9 \times 10^{-5}$	$3{,}7 \times 10^{-5}$
	5	$1{,}9 \times 10^{-5}$	$5{,}5 \times 10^{-5}$	$1{,}3 \times 10^{-5}$	$3{,}0 \times 10^{-5}$	$4{,}5 \times 10^{-5}$
	6	$1{,}9 \times 10^{-5}$	$6{,}6 \times 10^{-5}$	$1{,}5 \times 10^{-5}$	$3{,}0 \times 10^{-5}$	$5{,}4 \times 10^{-5}$
	7	$1{,}9 \times 10^{-5}$	$7{,}7 \times 10^{-5}$	$1{,}8 \times 10^{-5}$	$3{,}0 \times 10^{-5}$	$6{,}2 \times 10^{-5}$
	8	$1{,}9 \times 10^{-5}$	$8{,}8 \times 10^{-5}$	$2{,}0 \times 10^{-5}$	$3{,}0 \times 10^{-5}$	$7{,}1 \times 10^{-5}$
	9	$1{,}9 \times 10^{-5}$	$9{,}9 \times 10^{-5}$	$2{,}3 \times 10^{-5}$	$3{,}0 \times 10^{-5}$	$7{,}9 \times 10^{-5}$
	10	$1{,}9 \times 10^{-5}$	$1{,}1 \times 10^{-4}$	$2{,}5 \times 10^{-5}$	$3{,}0 \times 10^{-5}$	$8{,}8 \times 10^{-5}$

Een nog betere schatting van de faalkans wordt bereikt met de boven- en ondergrensbenadering volgens HOHENBICHLER en RACKWITZ [6.2]. Deze benadering maakt gebruik van een translatie van niet normaal verdeelde stochastisch afhankelijke basisvariabelen naar standaard normaal verdeelde onafhankelijke basisvariabelen (zie ook 5.3.4). Deze methode is minder eenvoudig en vergt een grotere rekencapaciteit dan de methode van Ditlevsen.

Cur frame Page 146 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 6.6 *Faalkans van het seriesysteem van voorbeeld 6.1.*

Als de sterkte van de elementen stochastisch onafhankelijk is, is het mogelijk om de totale sterkte van het seriesysteem te definiëren als de minimale sterkte van de elementen. De kansverdeling van de sterkte van het systeem is te berekenen met de theorie voor de minima (zie 2.5).

$$F_{R_{sys}}(R_{sys}) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_{R_i}(R_{sys})) \tag{6.15}$$

waarin:

R_{sys} is de sterkte van het systeem;
R_i is de sterkte van element i.

Als de sterkten van de elementen R_i onafhankelijk zijn, maar wel dezelfde kansverdeling hebben, geldt:

$$F_{R_{sys}}(R_{sys}) = 1 - \left(1 - F_R(R_{sys})\right)^n \tag{6.16}$$

Het heeft alleen zin om de sterkte van het systeem te definiëren als alle elementen aan exact dezelfde belasting zijn onderworpen of als de belastingen op de elementen onafhankelijk zijn en dezelfde kansverdeling bezitten.
In het eerste geval is de betrouwbaarheidsfunctie: $Z = R_{sys} - S$.
In het tweede geval moet de maximale belasting op een element worden bepaald. Dit gebeurt met behulp van de theorie voor de maxima.

Cur frame Page 147 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De kansverdeling van de maximale belasting is:

$$F_{S_{sys}}(S_{sys}) = \left(F_S(S_{sys})\right)^n \tag{6.17}$$

waarin:

S_{sys} is de maximale belasting op een element van het systeem.

Naast de discrete seriesystemen met n elementen komen er ook continue systemen voor, zoals bijvoorbeeld een dijklichaam of een betonnen balk. De sterkte van het continue seriesysteem kan in elk punt worden beschreven als een stochastische variabele met een verwachtingswaarde en een standaardafwijking.
De sterkte in twee verschillende punten zal doorgaans gecorreleerd zijn. De mate van correlatie hangt onder meer af van de afstand Δx tussen twee beschouwde punten. De relatie van de correlatie met de afstand wordt beschreven met de zogenoemde correlatiefunctie. Een veel gebruikte uitdrukking voor de correlatiefunctie is

$$\rho(R_x, R_{x+\Delta x}) = \exp\left(-\left(\frac{\Delta x}{d}\right)^2\right) \tag{6.18}$$

waarin:

$\rho(R_x, R_{x+\Delta x})$ is de correlatie tussen de sterkten op locatie x en x + Δx;
d is de zogenoemde correlatie-afstand, afhankelijk van het probleem.

Als elke locatie dezelfde betrouwbaarheidsindex β bezit, kan de faalkans van het systeem worden benaderd met:

$$P_f = \Phi(-\beta)\left(1 + \alpha_R \frac{\beta L}{\sqrt{\pi} d}\right) \tag{6.19}$$

waarin:

$\alpha_R = \dfrac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$ (volgt uit de niveau II berekening);

L is de lengte van het systeem.

Deze formulering leent zich goed voor het eenvoudig bepalen van lengte-effecten.

6.2.2 FAALKANS VAN HET PARALLELSYSTEEM

Een parallelsysteem is in zijn algemeenheid gekenmerkt door het feit dat elementen elkaar kunnen compenseren. Het falen van één element leidt niet automatisch tot falen van het systeem. De wijze en mate van compensatie kan nogal verschillen.
Het zuivere parallelsysteem faalt als alle elementen van het systeem falen. De faalruimte is gedefinieerd door:

$$E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n \tag{6.20}$$

Cur frame Page 148 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

waarin:

E_i is het falen van element i (i = 1, 2, ..., n).

De faalkans van het systeem is:

$$P_f = P(E_1)P(E_2 \mid E_1)P(E_3 \mid E_1, E_2) \ldots P(E_n \mid E \ldots E_{n-1}) \tag{6.21}$$

Als de gebeurtenissen E_i stochastisch onafhankelijk zijn, geldt:

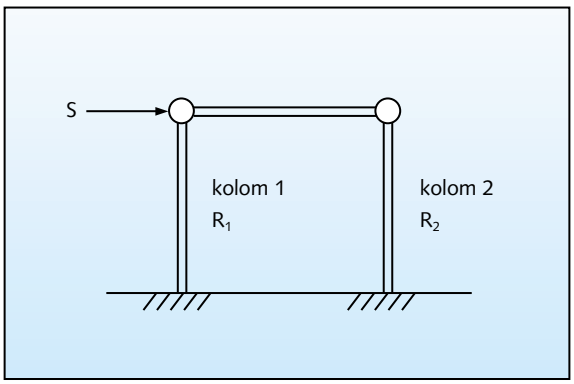
$$P_f = P(E_1)P(E_2) \ldots P(E_n) \tag{6.22}$$

Falen van het parallelsysteem kan ook worden gedefinieerd als het complement van niet-falen. Een parallelsysteem faalt niet zolang er minstens één element niet faalt. De faalkans kan derhalve ook worden geschreven als:

$$P_f = 1 - P(\overline{E}_1 \cup \overline{E}_2 \cup \ldots \cup \overline{E}_n) \tag{6.23}$$

Als niveau II methoden worden toegepast voor het bepalen van de faalkansen kunnen met behulp van de vergelijkingen van Ditlevsen de onder- en bovengrens van $P(\overline{E}_1 \cup \overline{E}_2 \cup \ldots \cup \overline{E}_n)$ worden berekend.
Als de faalkans wordt bepaald met niveau III methoden zijn alleen de definitie van de faalruimte en de voorwaardelijke kansverdelingen van de basisvariabelen van belang. Alle fysische en stochastische afhankelijkheden worden in een niveau III benadering volledig meegenomen.

In een aantal gevallen is het mogelijk en nuttig om de sterkte van het totale systeem te bepalen, om vervolgens de faalkans van het systeem te schatten.
Dit is bijvoorbeeld het geval als de elementen gezamenlijk onderworpen zijn aan één, op het systeem werkende, belasting. Dit geval laat zich eenvoudig demonstreren aan de hand van een constructief probleem. In figuur 6.7 is een portaal getekend, dat bestaat uit twee kolommen met daarop een regel. De regel is belast door een horizontale belasting S. De weerstand tegen bezwijken van de portaalconstructie wordt gevormd door de gezamenlijke sterkte van de kolommen.



Figuur 6.7 *Portaalconstructie.*

Cur frame Page 149 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Op het eerste gezicht lijkt het veroorloofd om de sterkte van het systeem te definiëren als:

$$R_{sys} = R_1 + R_2 \tag{6.24}$$

waarin:

R_1, R_2 is de maximale reactiekracht, die kan worden geleverd door kolom 1 respectievelijk 2;
R_{sys} is de sterkte van het systeem.

De geldigheid van deze formulering van de sterkte is echter sterk afhankelijk van het gedrag van de elementen na het bereiken van de maximale reactiekracht. Het falen van één kolom wordt beschreven met de faalruimte:

$$R_i < \frac{S}{2} \tag{6.25}$$

Als na het falen, ten gevolge van breuk, de kolom geen reststerkte meer heeft, wordt de faalruimte voor het systeem beschreven met:

$$(R_2 < S) \cap \left(R_1 < \frac{S}{2}\right) \tag{6.26}$$

De faalkans is:

$$P_f = P\left(R_2 < S | R_1 < \frac{S}{2}\right) P\left(R_1 < \frac{S}{2}\right) \tag{6.27}$$

Als de kolom niet breekt maar vloeit, heeft de kolom een reststerkte van R_1. De faalruimte wordt bepaald door:

$$(R_2 < S - R_1) \cap \left(R_1 < \frac{S}{2}\right) \tag{6.28}$$

De faalkans is in dit geval:

$$\begin{aligned} P_f &= P\left(R_1 + R_2 < S | R_1 < \frac{S}{2}\right) \cdot P\left(R_1 < \frac{S}{2}\right) \\ &= P(R_1 + R_2 < S) \cdot P\left(R_1 < \frac{S}{2} \middle| R_1 + R_2 < S\right) \\ &= P(R_1 + R_2 < S) \end{aligned} \tag{6.29}$$

Uit de formulering van de faalkans blijkt dat in het laatste geval de sterkte van het systeem mag worden beschreven als de som van de sterkte van de elementen. Uit dit voorbeeld blijkt dat bij de definitie van de sterkte van een parallelsysteem en bij het berekenen van de faalkans van het systeem het materiaalgedrag,

Cur frame Page 150 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

met name de reststerkte van de elementen, van groot belang is. Voor een nadere beschouwing van materiaalgedrag wordt verwezen naar bijlage H.
Een parallelsysteem, waarbij de reststerkte van de elementen gelijk is aan de maximale sterkte van de elementen, heet een ductiel parallelsysteem. Voor een ductiel parallelsysteem met n elementen geldt voor de sterkte:

$$\mu_{R_{sys}} = \sum_{i=1}^{n} \mu_{R_i}$$
$$\sigma^2_{R_{sys}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \rho_{ij} \sigma_{R_i} \sigma_{R_j} \qquad (6.30)$$

Voor grote n zal, op grond van de centrale limietstelling, de sterkte R_{sys} normaal verdeeld zijn.
Naast het hiervoor beschreven parallelsysteem zijn er nog varianten. Een aantal van deze varianten komt aan de orde bij de behandeling van de poorttypen in een foutenboom (zie 6.3.5).

6.3 ANALYSE VAN SYSTEMEN

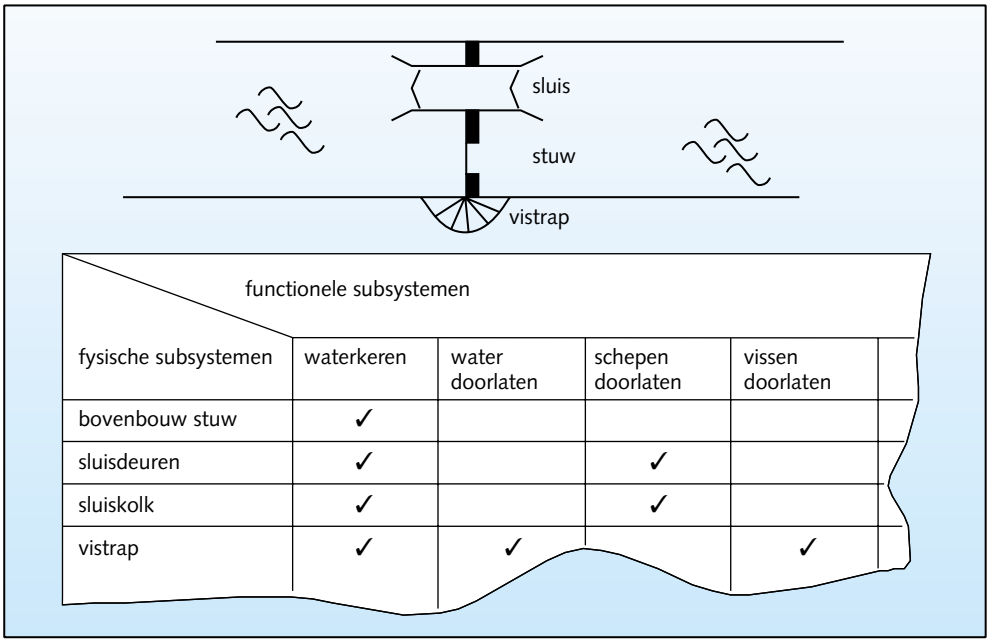
6.3.1 INLEIDING VAN DE ANALYSE VAN SYSTEMEN

De analyse van een systeem begint met een beschrijving van de functies van het systeem en de componenten van het systeem. In het voorgaande is beschreven hoe de faalkansen van de verschillende serie- en parallelsystemen kunnen worden bepaald. Doorgaans zal een systeem echter niet voldoen aan de definitie van een serie- of parallelsysteem. In zo'n geval is het belangrijk om het systeem te verdelen in subsystemen.
Meestal zal sprake zijn van subsystemen als verzameling van een aantal fysische componenten of processen. Daarnaast kan ook voor elke functie van het systeem een subsysteem worden onderscheiden. Bij een dergelijke onderverdeling in subsystemen zijn de functionele eisen van het systeem tevens de eisen voor het functioneren van de subsystemen.
De fysische componenten of processen kunnen elementen vormen van de verschillende functionele subsystemen, waardoor deze aan elkaar zijn gerelateerd. Door het opstellen van een matrix, waarin deze relaties worden aangegeven, kunnen de functionele eisen voor de subsystemen van fysische componenten of processen worden bepaald.
Tevens kunnen de relaties van de verschillende subsystemen met betrekking tot de functionele eisen worden ontleend aan de matrix. Een aanzet van een dergelijke matrix is in figuur 6.8 gegeven.
Doordat een fysisch subsysteem deel kan uitmaken van meer functionele subsystemen is het mogelijk dat er conflicterende eisen worden gesteld aan het fysisch subsysteem.

Vanuit de systeembeschrijving worden de gebeurtenissen geformuleerd, die wel of niet tot falen van het systeem leiden.
Verschillende subsystemen kunnen een zelfde basisgebeurtenis hebben die leidt tot falen. In een dergelijk geval wordt gesproken van „common cause failure". Een voorbeeld hiervan is een aardbeving die kan leiden tot het bezwijken van verschillende systemen.
Ook is het mogelijk dat verschillende subsystemen een gemeenschappelijk faalmechanisme hebben. Dan is er sprake van een zogeheten „common mode failure". Een voorbeeld hiervan is het voorkomen van een ondeugdelijk onderdeel in twee systemen. Te denken valt aan een ondeugdelijk onderdeel in een diesel-

Cur frame Page 151 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

generator die is geplaatst als noodaggregaat. Als omwille van de betrouwbaarheid een zelfde dieselgenerator is geïnstalleerd als reserve, is er sprake van twee systemen met een zelfde faalmechanisme.
Bij de analyse van een systeem staan nog meer technieken ter beschikking om inzicht te krijgen in het functioneren of het falen van het systeem. In de volgende paragrafen wordt een aantal van deze technieken in beschouwing genomen.



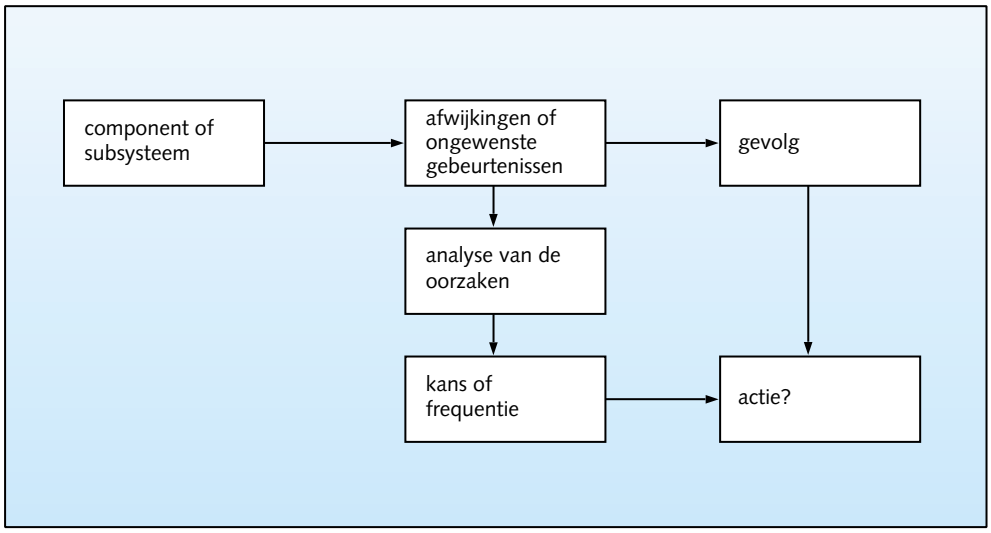
functionele subsystemen / fysische subsystemen	waterkeren	water doorlaten	schepen doorlaten	vissen doorlaten
bovenbouw stuw	✓			
sluisdeuren	✓		✓	
sluiskolk	✓		✓	
vistrap	✓	✓		✓

Figuur 6.8 *Relaties tussen functionele en fysische subsystemen van een sluizencomplex.*

6.3.2 FMEA (FAILURE MODES AND EFFECTS ANALYSIS)

De FMEA is een kwalitatieve analyse, waarbij de faalmechanismen van de componenten en subsystemen en de gevolgen voor het functioneren van het systeem systematisch worden opgeschreven. De FMEA wordt doorgaans uitgevoerd in de ontwerpfase van een systeem of proces, met als doel het identificeren van componenten en subsystemen, waaraan verbeteringen moeten plaatshebben met betrekking tot de betrouwbaarheid. Het algemene doel van een FMEA is een zo volledig mogelijk beeld geven van alle te voorziene ongewenste gebeurtenissen en gevolgen in een systeem of proces, zodat gefundeerd kan worden besloten dat bepaalde acties wel of niet moeten worden ondernomen. In figuur 6.9 is een algemeen stroomschema gegeven voor de FMEA.
De FMEA is van beneden naar boven (bottom-up) uit te voeren door te starten op het niveau van de componenten of subsystemen om vervolgens de analyse uit te breiden tot systeemniveau. De omvang van de analyse is sterk afhankelijk van het laagste niveau (component of subsysteem).
Om de vaak enorme omvang te beperken, kan de beschikbaarheid van gegevens met betrekking tot falen van componenten of subsystemen het laagste niveau bepalen, waarvoor het zinnig is de analyse te starten. De „bottom-up" benadering heeft als nadeel dat bijna altijd enkele componenten en subsystemen deel uitmaken van de analyse, die niet of nauwelijks van belang zijn voor het functioneren van het totale systeem of proces. Een andere wijze voor het uitvoeren van de FMEA is de zogenoemde „top-down" benadering. Hierbij wordt de analyse in twee of meer fasen uitgevoerd.

Cur frame Page 152 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 6.9 *Stroomschema FMEA.*

De eerste fase is het indelen van het systeem in functieblokken. Een functieblok is een verzameling van componenten of deelsystemen die gezamenlijk één functie hebben.
Het mogelijk ongewenste funtioneren en de daaruit voortvloeiende gevolgen kunnen voor elk functieblok worden geïnventariseerd op basis van de kennis met betrekking tot de gewenste functie(s) en/of ervaring met gelijksoortige subsystemen. Per functieblok kan worden nagegaan in hoever het mogelijk ongewenste functioneren van een functieblok van belang is voor het functioneren van het totale systeem. Afhankelijk hiervan wordt besloten of een functieblok in een volgende fase verder wordt geanalyseerd.
Met de „top-down" benadering kan werk en tijd worden bespaard, maar kunnen er faalmechanismen over het hoofd worden gezien.
Het vastleggen van de resultaten van een FMEA geschiedt op een gestructureerde wijze in een tabel. Een voorbeeld van een FMEA-tabel voor een systeem dat water aanvoert voor een wasserij is in tabel 6.2 weergegeven.

Tabel 6.2 *Registratie FMEA.*

	onderdeel:waterleiding			
	functie:aanvoer van water			
	afwijking	mogelijke oorzaak	gevolg	actie
	geen water	pomp werkt niet	stagnatie van het productieproces	tweede pomp installeren
		leiding is kapot		reserve leiding aanleggen
		afsluiter zit vast		
	te veel water	pomp slaat niet af	wateroverlast en verspilling van water	beveiligingssyteem voor de bediening van de pomp
		afsluiter werkt niet		afsluiter dubbel uitvoeren

Cur frame Page 153 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

6.3.3 FMECA (FAILURE MODES, EFFECTS AND CRITICALITY ANALYSES)

Een FMEA wordt een FMECA door het toevoegen van een zogenoemde „criticality matrix". In deze matrix worden de verschillende faalmechanismen en gevolgen aan elkaar gerelateerd en worden de gevolgen naar ernst gerangschikt. Tevens worden de frequenties van de verschillende faalmechanismen geschat. Op deze wijze wordt de rangorde bepaald, waaruit de meest frequente faalmechanismen en ernstigste gevolgen naar voren komen.
De gegevens die een „criticality matrix" bevat zullen per systeem verschillen. Mogelijke factoren zijn:

- λ_i is de frequentie van faalmechanisme i;
- t_i is de tijdsduur waarin het systeem of subsysteem operationeel is;
- P_{si} is de waarschijnlijkheid waarmee het faalmechanisme leidt tot het eindeffect;
- S_i is de schadefactor, die de ernst van het gevolg aangeeft.

Met behulp van deze gegevens kan de zogenoemde criticaliteitsfactor worden bepaald:

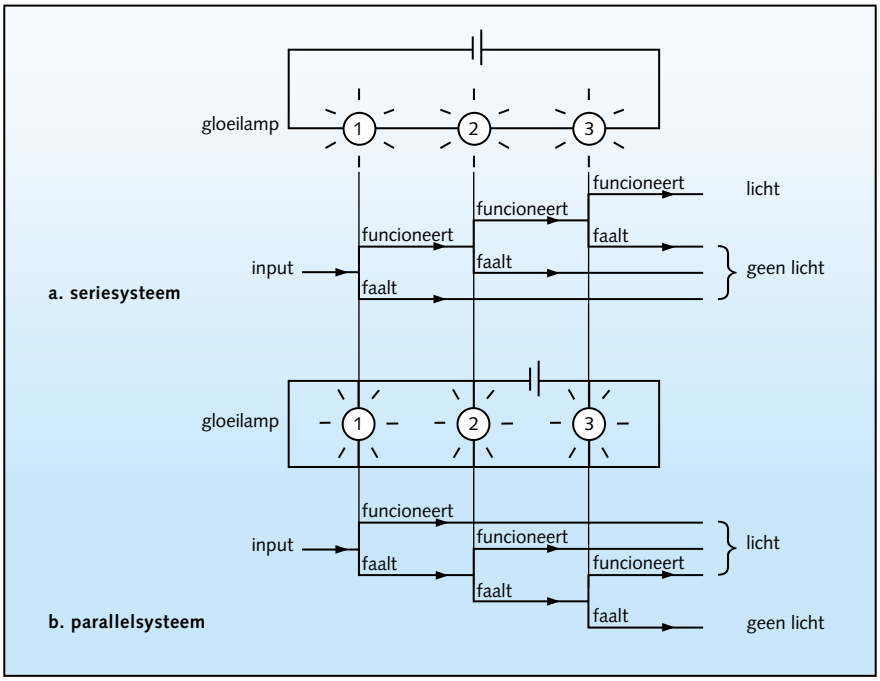
$$C_i = \lambda_i t_i P_{si} S_i \tag{6.31}$$

De grootte van C_i bepaalt de rangorde van de faalmechanismen. Deze rangorde zal weer doorslaggevend zijn voor de keuze van te ondernemen acties. De kosten van een actie ter verlaging van de frequentie van een faalmechanisme of ter beperking van het gevolg kan ook een onderdeel uitmaken van de criticality matrix.

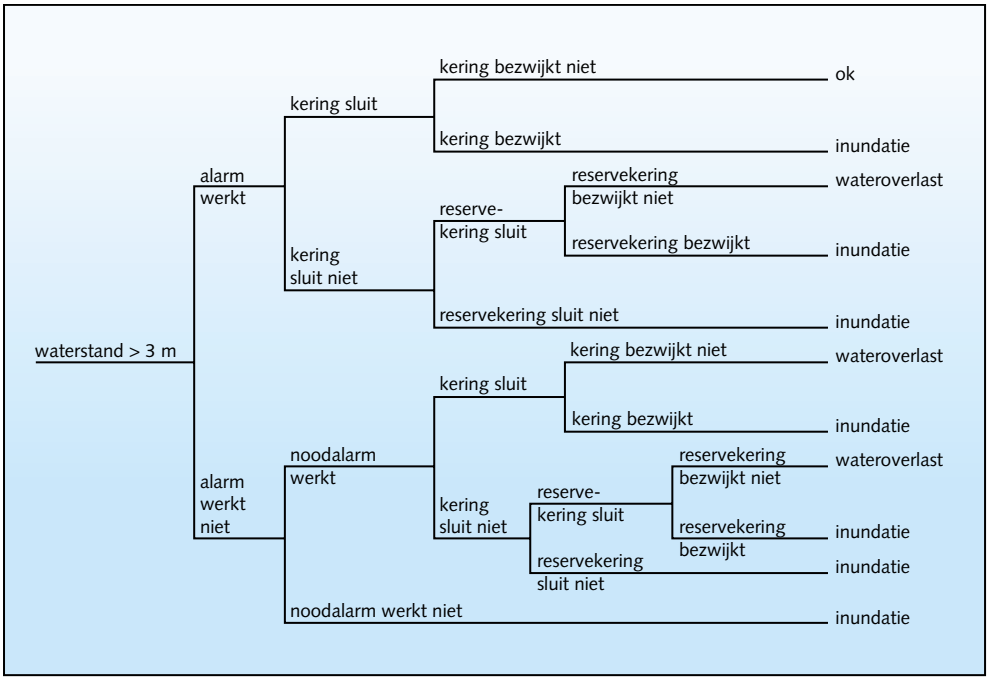
6.3.4 GEBEURTENISSENBOOM

De gebeurtenissenboom is een hulpmiddel bij het analyseren van de reactie van een systeem op één gebeurtenis. De gebeurtenissenboom legt op logische wijze het verband tussen deze ene „begingebeurtenis" en alle mogelijke gevolgen door het inventariseren en analyseren van de mogelijke gebeurtenissen, die kunnen volgen op de begingebeurtenis. In figuur 6.10 zijn voorbeelden van gebeurtenissenbomen voor een serieschakeling en een parallelschakeling van drie gloeilampen weergegeven.
Bij gebeurtenissenbomen is het gebruikelijk om „falen" met de onderste tak en „functioneren" met de bovenste tak na een knooppunt aan te geven. In de gebeurtenissenbomen zijn direct het zuivere serie- en parallelsysteem te herkennen. Veel systemen zijn minder eenvoudig, omdat zij bestaan uit combinaties van serie- en parallelsystemen. Een voorbeeld van een gebeurtenissenboom van een dergelijk systeem is in figuur 6.11 gegeven. In deze gebeurtenissenboom zijn de mogelijke reacties van een beweegbare hoogwaterkering op de begingebeurtenis „hoogwater" weergegeven.
In de boom zijn subsystemen te onderscheiden, die nog verder kunnen worden geanalyseerd. Te onderscheiden zijn bijvoorbeeld het alarmsysteem, het sluitingssysteem en de gesloten kering als constructief systeem.
Bij het maken van een gebeurtenissenboom is het zaak om niet teveel details weer te geven. De subsystemen kunnen het beste apart worden geanalyseerd om te voorkomen dat de gebeurtenissenboom onoverzichtelijk wordt.
Met behulp van de gebeurtenissenboom kan een verzameling gebeurtenissen worden gedefinieerd die leidt tot falen of functioneren.
In figuur 6.12 is de kans op „licht" en „geen licht" bepaald voor het serie- en parallelsysteem van figuur 6.10.

Cur frame Page 154 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

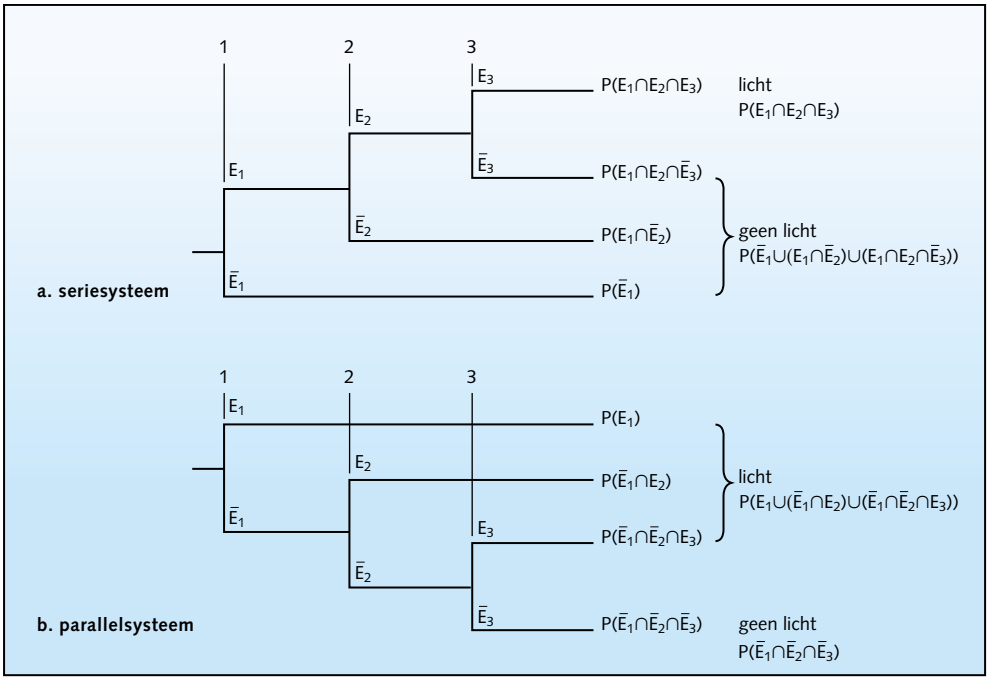


Figuur 6.10 *Gebeurtenissenbomen voor een seriesysteem en voor een parallelsysteem.*



Figuur 6.11 *Gebeurtenissenboom van een beweegbare kering.*

Cur frame Page 155 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



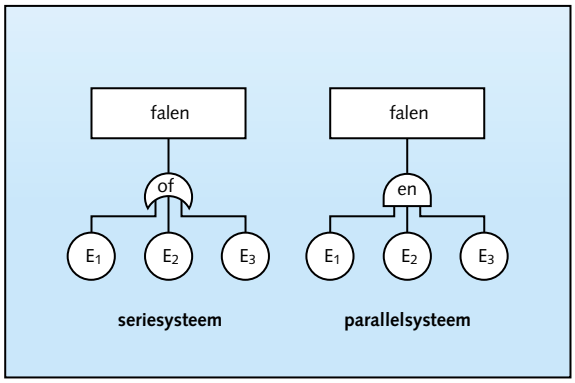
Figuur 6.12 *Kans op 'licht' en 'geen licht' bij een serie- en parallelsysteem.*

6.3.5 FOUTENBOOM

De foutenboom geeft een logische opeenvolging van alle gebeurtenissen, die leiden tot één ongewenste „topgebeurtenis". Deze topgebeurtenis staat bovenaan de boom. In figuur 6.13 zijn de foutenbomen voor de systemen van figuur 6.10 gegeven.

De gebeurtenissen E_1, E_2 en E_3 zijn basisgebeurtenissen. E_1 is de gebeurtenis: „gloeilamp 1 faalt". In de knoop boven de basisgebeurtenissen staat de conditie, waaraan moet worden voldaan om de daarboven gelegen samengestelde gebeurtenis te laten optreden. Deze conditie wordt een poort genoemd. In de foutenboom worden alle subsystemen onder een aparte poort gebracht.

In figuur 6.13 zijn twee van deze condities gegeven, te weten: de „en"-poort en de „of"-poort. Bij de „en"-poort moeten alle onderliggende gebeurtenissen plaatshebben om de samengestelde gebeurtenis te laten optreden. Bij de „of"-poort moet minimaal één van de onderliggende gebeurtenissen optreden om de poort in de foutenboom te passeren.



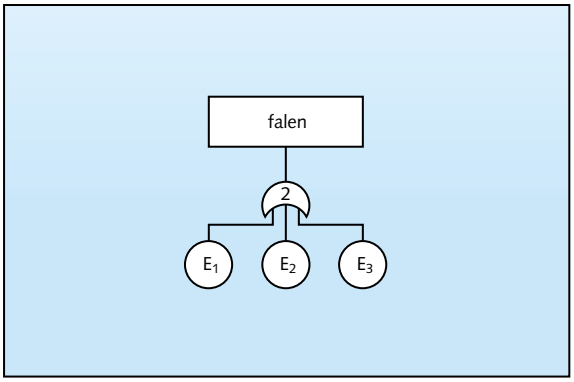
Figuur 6.13 *Foutenbomen voor serie- en parallelsysteem.*

Cur frame Page 156 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Naast de „of"- en de „en"-poort zijn er nog varianten op deze poorten, te weten:

> de „voting gate";
> de „inhibit gate";
> de „priority and gate";
> de „exclusive or gate".

Bij de „voting gate" moet een gegeven minimum aantal van de onderliggende gebeurtenissen optreden om de poort in de foutenboom te kunnen passeren. Een voorbeeld hiervan is een elektriciteitscentrale met een systeem van drie generatoren, waarvan er ten minste twee moeten functioneren om voldoende stroom te kunnen leveren. Bij het falen van twee generatoren faalt het systeem. De foutenboom voor dit voorbeeld is in figuur 6.14 gegeven.



Figuur 6.14 *Foutenboom met 'voting gate'.*

Als het falen van de elementen onderling stochastisch onafhankelijk is en de faalkans van een element voor alle elementen gelijk is, geldt:

$$P_f = \sum_{k=m}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} (P_{f_e})^k (1 - P_{f_e})^{n-k} \qquad (6.32)$$

waarin:

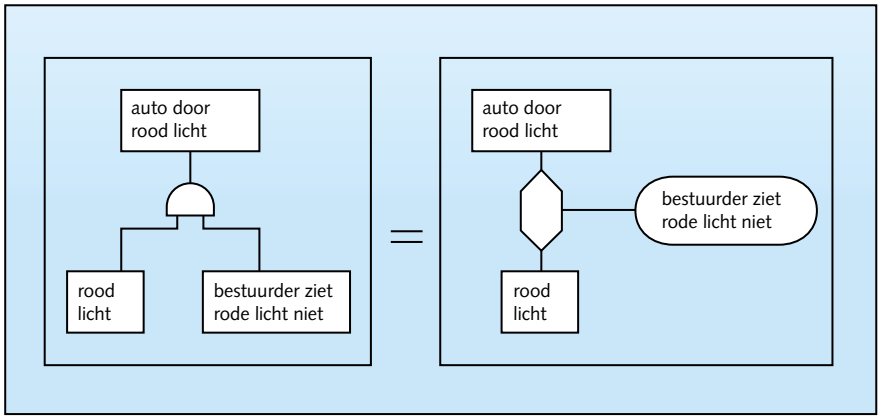
P_{f_e} is de faalkans van een element;
n is het totale aantal elementen;
m is het aantal elementen dat moet falen om het systeem te laten falen.

In het geval de faalkansen van de elementen niet gelijk zijn, moet voor elke combinatie, die leidt tot falen, de faalkans worden berekend. De faalkans is dan de som van de kansen van de combinaties. In het geval van de „voting gate" van figuur 6.14 leiden de combinaties $(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3)$, $(E_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3)$, $(\overline{E}_1 \cap E_2 \cap E_3)$ en $(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$ tot falen. Als de gebeurtenissen onafhankelijk zijn, is de faalkans:

$$P_f = P(E_1)P(E_2)\left(1 - P(E_3)\right) + P(E_1)P(E_3)\left(1 - P(E_2)\right) + P(E_2)P(E_3)\left(1 - P(E_1)\right) + P(E_1)P(E_2)P(E_3) \qquad (6.33)$$

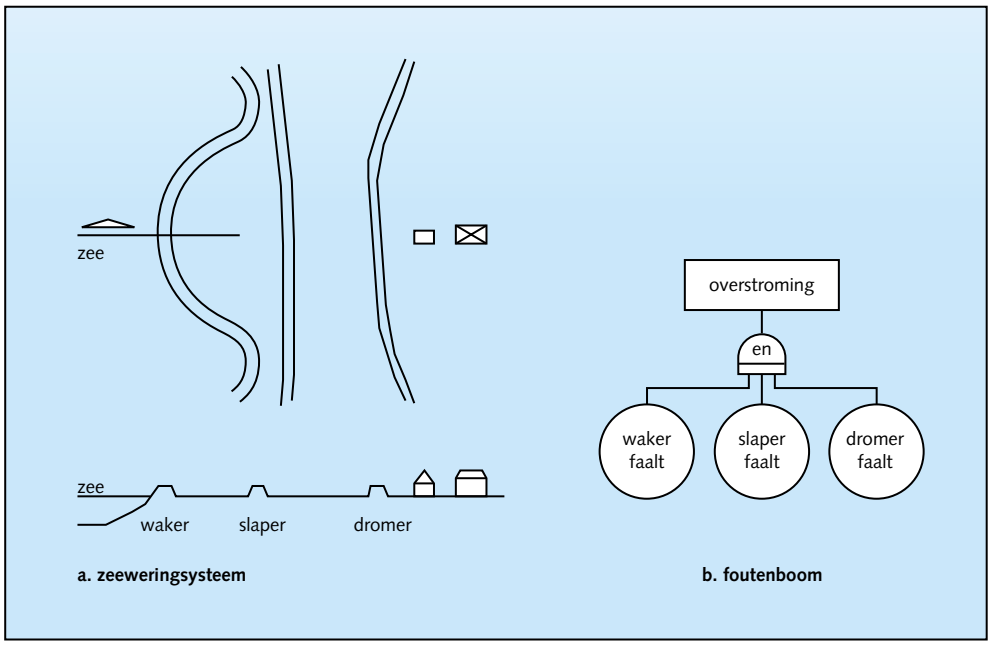
Cur frame Page 157 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De „inhibit gate" is een vervanger van de „en"-poort, voor gevallen waarbij één van de onderliggende gebeurtenissen een voorwaardelijke gebeurtenis is. In figuur 6.15 is hiervan een voorbeeld gegeven. De gebeurtenis naast de „inhibit gate" is een voorwaardelijke gebeurtenis, die alleen kan optreden als de begingebeurtenis heeft plaatsgehad.



Figuur 6.15 *Foutenboom met 'inhibit gate'.*

De „priority and gate" is een aanvulling op de gewone „en"-poort. Bij deze poort moeten alle onderliggende gebeurtenissen in de volgorde van links naar rechts optreden, om te leiden tot de samengestelde gebeurtenis. Een voorbeeld hiervan is gegeven in figuur 6.16.



Figuur 6.16 *Foutenboom van een zeeweringssysteem.*

Cur frame Page 158 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De faalkans van het systeem is:

$$P_f = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2) \tag{6.34}$$

waarin:

E_1 is de waker faalt;
E_2 is de slaper faalt;
E_3 is de dromer faalt.

Er zijn uiteraard nog veel meer parallelsystemen te bedenken, waarbij andere eisen worden gesteld aan het falen van de elementen die falen van het systeem veroorzaken. In de praktijk blijkt echter dat, door het werken met subsystemen, het mogelijk is om met de hiervoor beschreven parallelsystemen de faalkans van een willekeurig parallelsysteem te schatten.
Ten slotte is er nog de „exclusive or gate" als uitbreiding op de „of"-poort. In het geval van een „exclusive or gate" treedt de samengestelde gebeurtenis op, als precies één van de onderliggende gebeurtenissen plaatsheeft.
Als voorbeeld van een dergelijk systeem kan worden gedacht aan een verpakkingssysteem. Een verpakkingssysteem is te scheiden in een systeem dat het te verpakken product aanvoert, een systeem dat het verpakkingsmateriaal aanvoert en een systeem dat het product verpakt.
Stel dat falen van het systeem wordt gedefinieerd als: „Het systeem levert onverpakte producten of leeg verpakkingsmateriaal". In dit geval wordt het niet leveren van een product niet als topgebeurtenis beschouwd, omdat geen directe gevolgschade optreedt.
De faalruimte van het systeem is bepaald door:

$$(E_1 \cup E_2) \cap (\overline{E_1 \cap E_2}) \tag{6.35}$$

waarin:

E_1 is geen aanvoer van het product;
E_2 is geen aanvoer van het verpakkingsmateriaal.

De kans op falen kan op eenvoudige wijze worden bepaald met niveau III methoden. Met deze methoden kan stochastische afhankelijkheid van de gebeurtenissen E_1 en E_2 eenvoudig worden meegenomen in de procedure van simuleren of integreren.
Als niveau II methoden worden toegepast, moet de faalkans van het systeem worden bepaald met behulp van de faalkansen van de afzonderlijke elementen.
De faalkans van het systeem is:

$$\begin{aligned} P_f &= P(E_1) + P(E_2) - 2P(E_1 \cap E_2) \\ &= P(E_1) + P(E_2) - 2P(E_1)P(E_2|E_1) \end{aligned} \tag{6.36}$$

Cur frame Page 159 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Met behulp van de boven- en ondergrensbenadering voor $P(E_1 \cap E_2)$, kan de faalkans van het systeem worden geschat.
In tabel 6.3 is een kort overzicht gegeven van de verschillende poorten en de wijze waarop deze worden getekend in een foutenboom.

Tabel 6.3 *Symbolen voor de diverse poorten in een foutenboom.*

symbool	betekenis
	„en" poort
	„of" poort
	voting gate
	inhibit gate
	exclusive or gate
	priority and gate

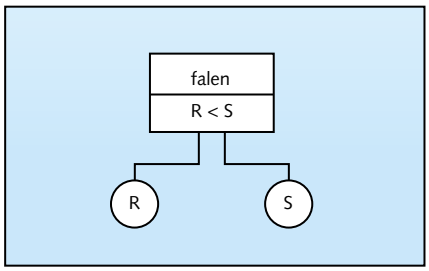
Naast de verschillende poorten komen er in de foutenboom ook verschillende gebeurtenissen voor. In tabel 6.4 is een zestal symbolen gegeven voor de aanduiding van verschillende gebeurtenissen.

Tabel 6.4 *Gebeurtenissen.*

symbool	betekenis
	basisgebeurtenis
	niet verder ontwikkelde gebeurtenis
	samengestelde gebeurtenis I (gevolg)
	samengestelde gebeurtenis II (gevolg)
	voorwaardelijke gebeurtenis (gebruikt bij inhibit gate)
	normale gebeurtenis (house event)
	verwijssymbool

Cur frame Page 160 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De basisgebeurtenis is een begingebeurtenis, die zich aan de voet van de foutenboom bevindt. Een dergelijke gebeurtenis betreft meestal het falen van een systeemcomponent.
Bij de niet verder ontwikkelde gebeurtenis is er geen diepgaande analyse van de onderliggende basisgebeurtenissen uitgevoerd. Bij de kwantificering van de kans op het falen van het totale systeem wordt de kans op de niet verder ontwikkelde gebeurtenis soms verwaarloosd.
De samengestelde gebeurtenis I is een gevolggebeurtenis die optreedt als voldaan is aan de in de onderliggende poort gedefinieerde voorwaarde. De samengestelde gebeurtenis II is een variant op de basisgebeurtenis, waarbij de gebeurtenis optreedt als aan een in het kader aangegeven numerieke voorwaarde wordt voldaan. Deze poort is handig bij het definiëren van de faalruimte. In figuur 6.17 is hiervan een voorbeeld gegeven. In principe is de samengestelde gebeurtenis een combinatie van een poort en een gebeurtenis.



Figuur 6.17 *Samengestelde gebeurtenis II.*

De voorwaardelijke gebeurtenis komt alleen voor in samenhang met de „inhibit gate" en kan slechts optreden als de begingebeurtenis onder de poort heeft plaatsgehad.
De normale gebeurtenis is een gebeurtenis, die altijd optreedt. Ook in het geval een foutenboom is opgesteld in de veronderstelling dat een bepaalde, niet normale, gebeurtenis heeft plaatsgehad, wordt deze gebeurtenis dikwijls aangegeven met het symbool voor de normale gebeurtenis.
Het verwijssymbool wordt bij grote foutenbomen gebruikt om de boom in delen af te breken en te verwijzen naar elders weergegeven delen.
Met behulp van de gegeven formules voor de diverse poorten kunnen de kansen van de samengestelde gebeurtenissen worden berekend en worden samengesteld tot de kans van de uiteindelijke topgebeurtenis.

Een andere wijze voor het bepalen van de faalkans met behulp van de foutenboom is het opstellen van de structuurfunctie $\psi(y)$ van het systeem.
De waarde van de structuurfunctie is een binaire indicator voor de werking van het systeem:

$$\psi(\hat{y}) = 1 \text{ als het systeem faalt;} \tag{6.37}$$
$$\psi(\hat{y}) = 0 \text{ als het systeem werkt.} \tag{6.38}$$

waarin:

$\hat{y}$ $= (y_1, y_2, \ldots, y_n)$;
y_i is een binaire indicatorvariabele die het al dan niet optreden van de onderliggende gebeurtenissen aangeeft:
$y_i = 1$ als de basisgebeurtenis i optreedt;
$y_i = 0$ als de basisgebeurtenis i niet optreedt.

Cur frame Page 161 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De structuurfunctie voor een „en"-poort is gelijk aan het product van de indicatorvariabelen y_i van de basisgebeurtenissen:

$$\psi(y) = \prod_{i=1}^{n} y_i \tag{6.39}$$

De structuurfunctie is alleen gelijk aan 1 als geen enkele y_i gelijk is aan nul.
Voor de „of"-poort is de structuurfunctie:

$$\psi(y) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - y_i) \tag{6.40}$$

Als één van de indicatorvariabelen y_i de waarde 1 krijgt, faalt het systeem.
Op gelijke wijze kan een indicatorfunctie worden opgesteld voor een willekeurige foutenboom met verschillende subsystemen.
De verwachtingswaarde van een indicatorvariabele is:

$$E(y_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{y_i}(y_i) y_i dy_i = 0(1 - P_{f_i}) + 1P_{f_i} = P_{f_i} \tag{6.41}$$

waarin:

P_{f_i} is de kans op gebeurtenis i.

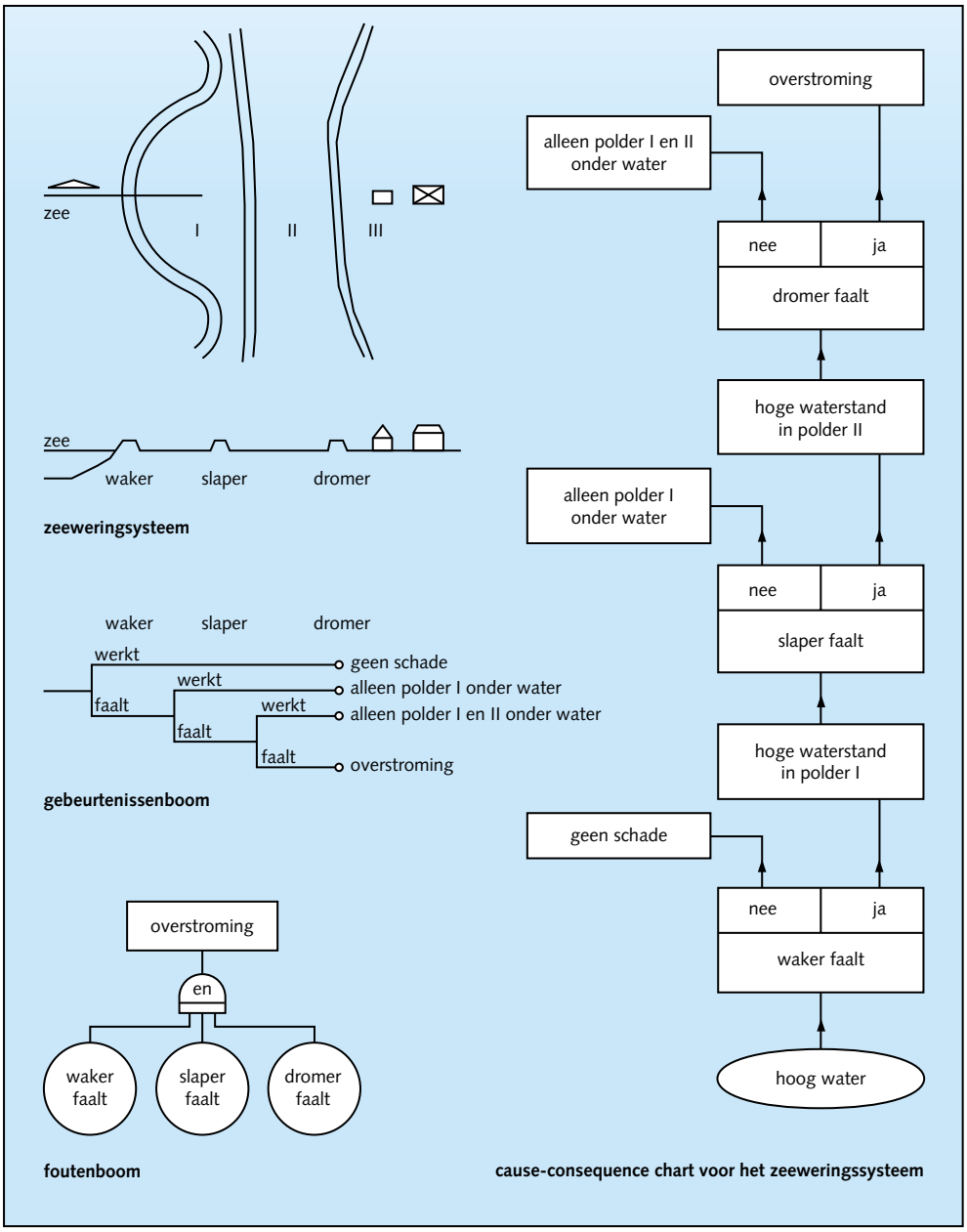
Als de basisgebeurtenissen onafhankelijk zijn, is de verwachtingswaarde van de structuurfunctie gelijk aan de faalkans van het systeem.
Door de verwachtingswaarde van de indicatorvariabelen in te vullen in de structuurfunctie, wordt in dit geval de faalkans van het systeem gevonden.
Stochastische afhankelijkheid van de basisgebeurtenissen kan met de structuurfunctie niet in rekening worden gebracht.
Een methode, waarmee het in rekening brengen van stochastische afhankelijkheid op eenvoudige wijze wel mogelijk is, maakt gebruik van de definitie van de faalruimte als functie van de basisvariabelen. De faalruimte kan worden gedefinieerd met behulp van de foutenboom. In de foutenboom staan immers alle voorwaarden, waaraan moet worden voldaan, voor het optreden van de topgebeurtenis „falen". Het bepalen van de faalkans, na de definitie van de faalruimte, kan geschieden door numerieke integratie of Monte Carlo simulatie.

6.3.6 CAUSE CONSEQUENCE CHART

Bij de analyse van een systeem met behulp van een gebeurtenissenboom en een foutenboom zijn voor elk element en subsysteem slechts twee toestanden mogelijk, namelijk functioneren of falen. Het gevolg van een gebeurtenis kan niet als continue stochastische variabele in beschouwing worden genomen.
In de gebeurtenissenboom is het nog wel mogelijk om verschillende reacties van het totale systeem te analyseren ten gevolge van één begingebeurtenis.

Cur frame Page 162 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

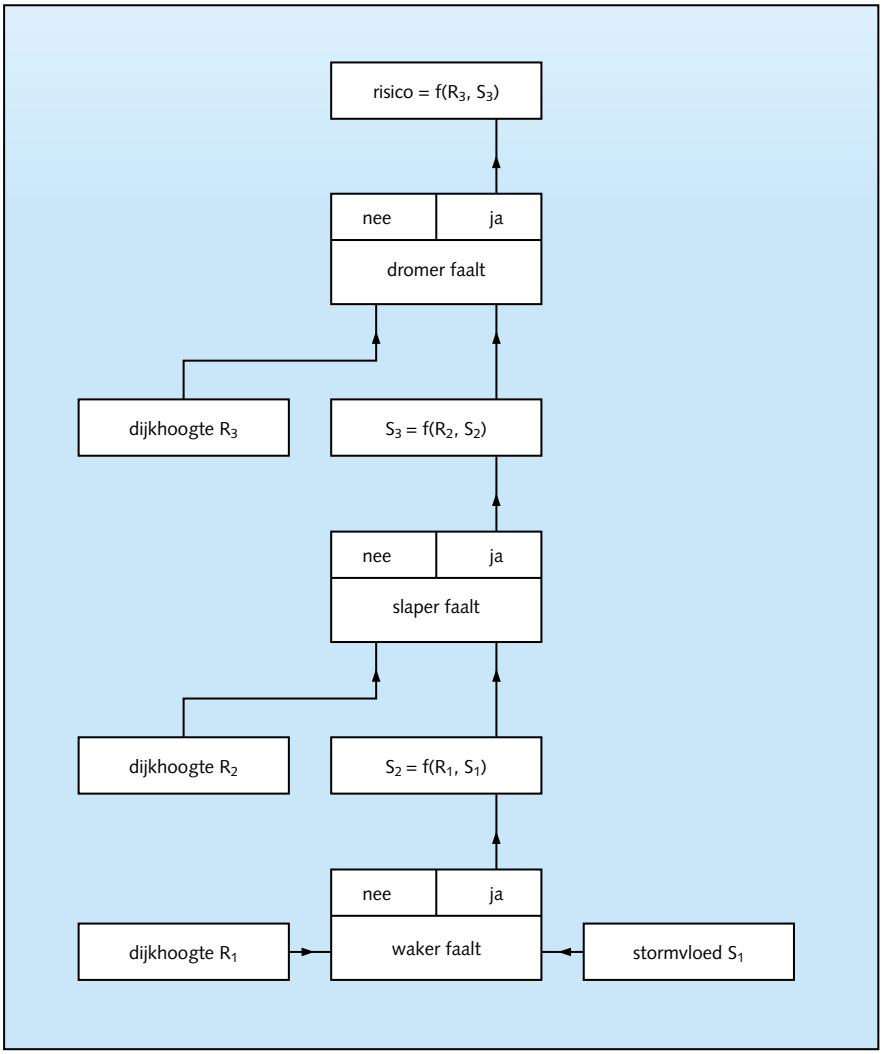
Zowel de gebeurtenissenboom als de foutenboom hebben als nadeel dat de gevolgen van het falen van een element of subsysteem in een goed functionerend totaalsysteem niet zichtbaar wordt gemaakt.
De cause consequence chart is een combinatie van de foutenboom en de gebeurtenissenboom.
In figuur 6.18 is een voorbeeld gegeven van een cause consequence chart voor een zeeweringssysteem, bestaande uit de waker, de slaper en de dromer. Hoewel de cause consequence chart reeds een verbetering is ten opzichte van de genoemde bomen, biedt het nog steeds niet de mogelijkheid om het gevolg als continue stochastische variabele in beschouwing te nemen.



Figuur 6.18 *Gebeurtenissenboom, foutenboom en een cause consequence chart voor een zeeweringssysteem.*

Cur frame Page 163 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

In figuur 6.19 is een aangepaste cause consequence chart gegeven, waarbij het gevolg van het falen van een element wel wordt beschreven als een functie van een aantal continue stochastische variabelen.
Met behulp van niveau III rekenmethoden kan met dit schema de kansverdeling van de schade en het risico (verwachtingswaarde van de schade) worden bepaald.



Figuur 6.19 *Eenvoudig rekenschema voor het risico van het zeeweringssysteem van figuur 6.18.*

6.4 TIJDSAFHANKELIJKHEID

6.4.1 LEVENSDUUR VAN EEN SYSTEEM

Net als bij de bepaling van de faalkans van een component kan de factor tijd een belangrijke rol spelen bij de bepaling van de faalkans van een systeem. Dit is afhankelijk van de tijdsafhankelijkheid van de sterkte en de belastingen. In dergelijke gevallen moet de periode worden vermeld, waarop de faalkans betrekking heeft en

Cur frame Page 164 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

wordt de faalkans geschreven als $P_f(t)$. In 5.5.1 is de levensduur van een component aan de orde geweest als stochastische variabele met de kansverdeling:

$$F_L(t) = P_f(t) \tag{6.42}$$

Tevens is in 5.5.1 afgeleid, dat bij een constant faaltempo de kansdichtheid van de levensduur te schrijven is als:

$$f_L(t) = \lambda e^{-\lambda t} \tag{6.43}$$

De kansverdeling van de levensduur is in dit geval:

$$F_L(t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{6.44}$$

De verwachtingswaarde van de levensduur is:

$$E(t) = \int_0^\infty t f_L(t) dt = \frac{1}{\lambda} \tag{6.45}$$

Voor een systeem, dat bestaat uit stochastisch onafhankelijke elementen, kan met behulp van de rekenregels voor kansen van samengestelde gebeurtenissen de kansverdeling van de levensduur worden bepaald met de verwachtingswaarden van de levensduur van de elementen.
Bij een parallelsysteem, dat faalt als alle elementen falen, is de kansverdeling van de levensduur:

$$F_L(t) = \prod_{i=1}^{n} F_{L_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda_i t}) \tag{6.46}$$

waarin:

$F_{L_i}(t)$ is de kansverdeling van de levensduur van element i;
n is het aantal elementen.

Differentiëren naar de variabele t geeft de kansdichtheidsfunctie van de levensduur:

$$f_L(t) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \lambda_i e^{-\lambda_i t} \frac{\prod_{j=1}^{n} (1 - e^{-\lambda_j t})}{(1 - e^{-\lambda_i t})} \right\} \tag{6.47}$$

Cur frame Page 165 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De verwachtingswaarde van de levensduur is:

$$\mu_{L_{sys}} = E(t_L) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} - (-1)^2 \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=i_1}^{n} (\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2})^{-1}$$
$$- (-1)^3 \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=i_1}^{n} \sum_{i_3=i_2}^{n} (\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \lambda_{i_3})^{-1} - \ldots \qquad (6.48)$$
$$\ldots - (-1)^n \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \sum_{i_n=i_{n-1}}^{n} (\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \ldots + \lambda_{i_n})^{-1}$$

Het voorgaande kan het beste worden gedemonstreerd aan de hand van een voorbeeld.

VOORBEELD 6.2

Gegeven een parallelsysteem dat bestaat uit twee stochastisch onafhankelijke elementen. Van de elementen zijn de verwachtingswaarden van de levensduur bekend. Deze bedragen:

$\mu_{L_1} = 10$ jaar en $\mu_{L_2} = 15$ jaar

Gevraagd wordt de verwachtingswaarde van de levensduur van het systeem.
Met de verwachtingswaarde van de elementen kunnen de λ-waarden worden bepaald:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu_{L_1}} = \frac{1}{10} \qquad \text{en} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\mu_{L_2}} = \frac{1}{15}$$

De verwachtingswaarde van de levensduur van het systeem is:

$$\mu_{L_{sys}} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$
$$= 10 + 15 + \frac{-1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}} = 19 \text{ jaar}$$

Van een seriesysteem, dat functioneert als geen van de elementen faalt en waarbij de elementen stochastisch onafhankelijk zijn, is de kansverdeling van de levensduur:

$$F_L(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{L_i}(t)) = 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} \qquad (6.49)$$

De kansdichtheidsfunctie wordt gevonden door te differentiëren naar t:

$$f_L(t) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \lambda_i \prod_{j=1}^{n} e^{-\lambda_j t} \right\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) t} \qquad (6.50)$$

Cur frame Page 166 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De verwachtingswaarde van de levensduur bedraagt in dit geval:

$$\mu_{L_{sys}} = \int_0^\infty t\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)e^{-\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)t}(dt)\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} \tag{6.51}$$

VOORBEELD 6.3

Als de elementen uit voorbeeld 6.2 niet een parallelsysteem maar een seriesysteem vormen, wordt de verwachtingswaarde van de levensduur:

$$\mu_{L_{sys}} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}} = 6 \text{ jaar}$$

Als de elementen stochastisch afhankelijk zijn, moet met de voorwaardelijke kansverdelingen van de levensduur van de elementen worden gerekend. Voor de kansverdeling van de levensduur van het systeem gelden dezelfde rekenregels als voor de faalkans die gegeven zijn in 6.3.

6.4.2 NIET-BESCHIKBAARHEID

In hoofdstuk 5 is de niet-beschikbaarheid van één component aan de orde geweest. In deze paragraaf wordt gekeken naar de niet-beschikbaarheid van een parallelsysteem. Met name worden er formules voor de niet-beschikbaarheid gegeven voor een zuiver parallelsysteem.
In het voorgaande is de kansverdeling van de levensduur bij constant faaltempo λ geschreven als:

$$F_L(t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{6.52}$$

Als $\lambda t \leq 0{,}01$ kan de kansverdeling worden benaderd met:

$$F_L(t) \approx \lambda t \tag{6.53}$$

De fout die hiermee wordt gemaakt, bedraagt minder dan 5 ‰.
De kansdichtheidsfunctie van de levensduur is dan:

$$f_L(t) \approx \lambda \tag{6.54}$$

In het vervolg van dit hoofdstuk wordt uitgegaan van deze vereenvoudiging.
De gezamenlijke kansdichtheidsfunctie van de levensduur van twee stochastisch onafhankelijke elementen is:

$$f_{L_1, L_2}(t_1, t_2) \approx \lambda_1 \lambda_2 \tag{6.55}$$

Cur frame Page 167 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Als van een systeem het falen van de componenten en het systeem niet direct wordt opgemerkt, is het nodig om het systeem te testen. Als het systeem faalt in de periode tussen de tests, dan zal het systeem gedurende een fractie van deze periode niet functioneren.
Als het systeem faalt op tijdstip t, dan is de niet-beschikbaarheid ten gevolge van niet-merkbaar falen:

$$T_u = \frac{T-t}{T} \tag{6.56}$$

waarin:

T is het testinterval.

De verwachtingswaarde van de niet-beschikbaarheid wordt berekend met:

$$\begin{aligned} U_{nmf} &= \int_0^T \int_0^{t_1} \lambda_1 \lambda_2 \frac{T-t_2}{T} dt_2 dt_1 \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{T} \int_0^T T t_1 - \frac{1}{2} t^2 dt_1 \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{T} \left[\frac{1}{2} T^3 - \frac{1}{6} T^3 \right] = \frac{1}{3} \lambda_1 \lambda_2 T^2 \end{aligned} \tag{6.57}$$

Bij deze vergelijking wordt verondersteld dat de beide elementen tegelijk operationeel zijn. Er is dus geen sprake van een systeem, waarbij één element „stand by" staat om operationeel te worden in het geval het tweede element faalt. Is dit wel het geval, dan is de niet-beschikbaarheid ten gevolge van niet-merkbaar falen:

$$U_{nmf} = \frac{1}{6} \lambda_1 \lambda_{2s} T^2 + \frac{1}{2} \lambda_1 Q_2 T + \frac{1}{6} \lambda_1 \lambda_{2b} T^2 \tag{6.58}$$

waarin:

λ_1 is het faaltempo element 1;
λ_{2s} is het faaltempo element 2 in „stand by" situatie;
λ_{2b} is het faaltempo element 2 in operationele toestand na falen van element 1;
Q_2 is de kans dat element 2 niet start bij het falen van element 1.

Aan het einde van het testinterval worden de elementen één voor één getest. Als tijdens het testen een element niet kan functioneren, faalt het systeem als het overgebleven element reeds heeft gefaald of faalt in de testperiode. Zonder bewijs wordt gegeven, dat de niet-beschikbaarheid als gevolg van testen, bij een parallelsysteem met twee operationele componenten die niet-merkbaar kunnen falen, gelijk is aan:

$$U_{test} = \lambda_2 \tau_1 + \frac{1}{2T} (\lambda_2 \tau_1^2 + \lambda_1 \tau_2^2) \tag{6.59}$$

Cur frame Page 168 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

waarin:

τ_1 is de tijdsduur van het testen van de eerste component;
τ_2 is de tijdsduur van het testen van de tweede component;
T is het testinterval.

Het komt vaak voor dat het falen van een element in het testinterval T wel merkbaar is, maar dat de elementen toch beide, om onderhoudsredenen, worden getest. In een dergelijk geval zal nooit het werkende element als eerste worden gerepareerd of vervangen. De niet-beschikbaarheid als gevolg van testen is in dit geval:

$$U_{test} = \frac{1}{2T}(\lambda_2\tau_1^2 + \lambda_1\tau_2^2) \tag{6.60}$$

Als één van de twee elementen van het systeem een „back up" element is, wordt de niet-beschikbaarheid van het systeem als gevolg van testen gelijk aan:

$$U_{test} = \frac{1}{2T}(\lambda_{2b}\tau_1^2 + \lambda_1\tau_2^2) \tag{6.61}$$

Naast de niet-beschikbaarheid als gevolg van niet-merkbaar falen en testen moet de niet-beschikbaarheid als gevolg van reparatie in beschouwing worden genomen.
Bij een systeem, waarbij de elementen niet-merkbaar kunnen falen, wordt de conditie van een element vastgesteld door testen. Als falen van een element wordt geconstateerd, zal doorgaans het element direct worden gerepareerd. Als het tweede element faalt tijdens de reparatieduur of reeds heeft gefaald in het testinterval, zal het systeem gedurende de reparatie niet beschikbaar zijn. De niet-beschikbaarheid van een dergelijk systeem is:

$$U_{rep} = \lambda_1\lambda_2(\Theta_1^2 + \Theta_2^2) \tag{6.62}$$

waarin:

Θ_1 is de reparatieduur van element 1;
Θ_2 is de reparatieduur van element 2.

Bij de beschouwing van de niet-beschikbaarheid als gevolg van reparatie moet nog een aantal variaties van het parallelsysteem met twee elementen worden onderscheiden, te weten:
> beide elementen staan „stand by" en de elementen kunnen niet-merkbaar falen;
> beide elementen staan „stand by" en falen van de elementen wordt direct opgemerkt;
> beide elementen staan „stand by" en één van de elementen kan niet-merkbaar falen;
> één van de elementen staat „stand by" en de elementen kunnen niet-merkbaar falen;
> één van de elementen staat „stand by" en falen van de elementen wordt direct opgemerkt;
> één van de elementen staat „stand by" en één van de elementen kan niet-merkbaar falen.

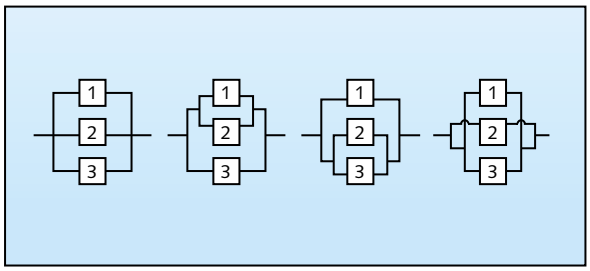
Cur frame Page 169 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

In tabel 6.5 zijn de formules voor de niet-beschikbaarheid als gevolg van reparatie van deze systemen weergegeven. Met deze formules is het ook mogelijk om de niet-beschikbaarheid van een parallelsysteem met drie elementen te berekenen.

Tabel 6.5 *Niet-beschikbaarheid als gevolg van reparatie.*

	parallelsysteem	U_{rep}
	beide elementen operationeel	$\lambda_1\lambda_2(\Theta_1^2 + \Theta_2^2)$
	beide elementen „stand by":	
	– niet-merkbaar falen	$\lambda_2 T\lambda_1\Theta_1 + \lambda_1\lambda_2(\Theta_1^2 + \Theta_2^2)$
	– merkbaar falen	$\lambda_1\lambda_2(\Theta_1^2 + \Theta_2^2)$
	– gemengd falen	$\frac{1}{2}\lambda_2 T\lambda_1\Theta_1 + \lambda_1\lambda_2(\Theta_1^2 + \Theta_2^2)$
	één element „stand by":	
	– niet-merkbaar falen	$\lambda_1 Q_2\Theta_1 + \lambda_1\lambda_{2b}\Theta_1^2 + \lambda_1\lambda_{2s}\Theta_2^2 + \frac{1}{T}Q_2\lambda_1\Theta_2^2$
	– merkbaar falen	$\lambda_1 Q_2\Theta_1 + \lambda_1\lambda_{2b}\Theta_1^2 + \lambda_1\lambda_{2s}\Theta_2^2$
	– gemengd falen	$\left(\frac{1}{2}\lambda_{2s}T + Q_2 + \lambda_{2b}\Theta_1\right)\lambda_1\Theta_1 + (\lambda_{2s}T + Q_2)\frac{\Theta_2}{T}\lambda_1\Theta_2$

In figuur 6.20 wordt duidelijk gemaakt op welke wijze een parallelsysteem met drie elementen kan worden gepresenteerd als een parallelsysteem van twee subsystemen met maximaal twee elementen.



Figuur 6.20 *Parallelsysteem met drie elementen.*

De niet-beschikbaarheid van het systeem met drie elementen kan nu worden berekend met behulp van de niet-beschikbaarheid van de subsystemen, te weten:

$$U = U_{1,2}U_3 + U_1U_{2,3} + U_{1,3}U_2 \qquad (6.63)$$

waarin:

U_i is de niet-beschikbaarheid van element i;
$U_{i,j}$ is de niet-beschikbaarheid van het systeem met de elementen i en j, gegeven dat het derde element faalt.

Cur frame Page 170 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Als bijvoorbeeld sprake is van merkbaar falen van de elementen, dan is de niet-beschikbaarheid als gevolg van de reparatie:

$$U_{rep} = U_1U_{2,3} + U_2U_{1,3} + U_3U_{1,2} \tag{6.64}$$

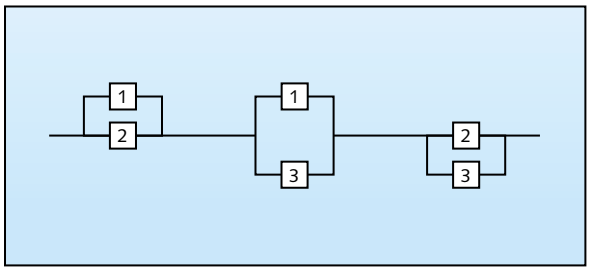
waarin:

$$U_{2,3} = \lambda_2\lambda_3\Theta_1^2$$
$$U_{1,3} = \lambda_1\lambda_3\Theta_2^2$$
$$U_{1,2} = \lambda_1\lambda_2\Theta_3^2$$

Uitwerken van de vergelijking (6.64) geeft:

$$\begin{aligned} U_{rep} &= \lambda_1\Theta_1\lambda_2\lambda_3\Theta_1^2 + \lambda_2\Theta_2\lambda_1\lambda_3\Theta_2^2 + \lambda_3\Theta_3\lambda_1\lambda_2\Theta_3^2 \\ &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3(\Theta_1^3 + \Theta_2^3 + \Theta_3^3) \end{aligned} \tag{6.65}$$

Voor het geval het falen van twee elementen in het parallelsysteem met drie elementen leidt tot het falen van het systeem, is het totale systeem te beschouwen als een serieschakeling van drie subparallelsystemen (zie fig. 6.21).



Figuur 6.21 *Schematisatie van het parallelsysteem met drie elementen.*

De niet-beschikbaarheid van het totale systeem kan worden benaderd met:

$$U \le U_{s1} + U_{s2} + U_{s3} \tag{6.66}$$

waarin:

U_{si} is de niet-beschikbaarheid van subsysteem i.

Uitwerking hiervan voor de niet-beschikbaarheid als gevolg van testen geeft:

$$\begin{aligned} U_{test} &= \frac{1}{2T}(\lambda_1\tau_2^2 + \lambda_2\tau_1^2) + \frac{1}{2T}(\lambda_1\tau_3^2 + \lambda_3\tau_1^2) + \frac{1}{2T}(\lambda_2\tau_3^2 + \lambda_3\tau_2^2) \\ &= \frac{1}{2T}\left((\lambda_2 + \lambda_3)\tau_1^2 + (\lambda_1 + \lambda_3)\tau_2^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\tau_3^2\right) \end{aligned} \tag{6.67}$$

Voor uitgebreide systemen met veel elementen en subsystemen is het berekenen van de niet-beschikbaarheid met behulp van de formules voor systemen met twee elementen zeer intensief werk.

Cur frame Page 171 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

In dergelijke gevallen kan meestal geen analytische oplossing worden gevonden voor de niet-beschikbaarheid. Met behulp van simulatie van de basisvariabelen van het stochastische proces kan de toestand van het systeem worden gesimuleerd. Een combinatie van een systeembeschrijving met behulp van een Markov-keten en simulatie met de Monte Carlo methode kan hierbij goede resultaten geven.

6.4.3 MARKOV-KETEN

In 5.5.5 is het Markov-proces behandeld als bijzonder stochastisch proces. Daarbij is met behulp van het Markov-diagram de niet-beschikbaarheid ten gevolge van falen van een element geanalyseerd.
Op soortgelijke wijze kan de niet-beschikbaarheid van een systeem worden afgeleid.
De algemene aanpak voor de analyse van een systeem met behulp van een Markov-diagram is onder te verdelen in een aantal stappen, te weten:

Stap 1. Inventarisatie van alle toestanden, waarin een systeem zich kan bevinden.
Stap 2. Vaststellen van de overgangswaarschijnlijkheden tussen de verschillende toestanden.
Stap 3. Formuleren van de differentiaalvergelijkingen die de verandering van de kansen in de tijd beschrijven.
Stap 4. Formuleren van de begin- en randvoorwaarden voor het stelsel met differentiaalvergelijkingen: $\sum P_i(t) = 1$.
Stap 5. Berekenen van de stationaire oplossing door het oplossen van het stelsel vergelijkingen onder de voorwaarden $dP_i(t)/dt = 0$.
Stap 6. Berekenen van het verloop van de faalkans in de tijd door het oplossen van het stelsel differentiaalvergelijkingen.

Aan de hand van een voorbeeld kan de procedure duidelijk worden gemaakt.

VOORBEELD 6.4

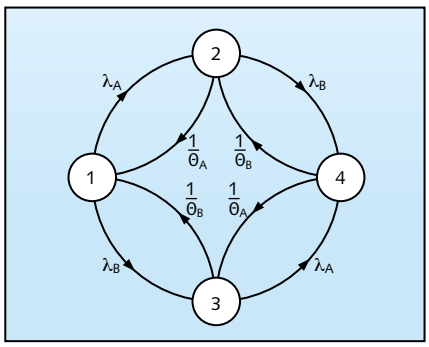
Gegeven een zuiver parallelsysteem, dat bestaat uit twee componenten (A en B). Falen van de elementen wordt direct opgemerkt. Er is voldoende reparatiecapaciteit aanwezig om twee componenten tegelijk te repareren.
Gevraagd wordt om de niet-beschikbaarheid en de faalkans van het systeem te bepalen met behulp van een Markov-diagram.

Stap 1. Mogelijke toestanden.

1. component A is intact;
   component B is intact;
2. component A is defect, wordt gerepareerd;
   component B is intact;
3. component A is intact;
   component B is defect, wordt gerepareerd;
4. component A is defect, wordt gerepareerd;
   component B is defect, wordt gerepareerd.

Stap 2. Overgangsvoorwaarden.
De overgangsvoorwaarden zijn aangegeven in het Markov-diagram van figuur 6.22.

Cur frame Page 172 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 6.22 *Markov-diagram ter bepaling van niet-beschikbaarheid.*

Stap 3. Opstellen van differentiaalvergelijkingen.
De veranderingen van de kansen op de verschillende gebeurtenissen zijn:

$$dP_1(t) = -P_1(t)\lambda_A dt - P_1(t)\lambda_B dt + P_2(t)\frac{1}{\Theta_A}dt + P_3(t)\frac{1}{\Theta_B}dt$$

$$dP_2(t) = P_1(t)\lambda_A dt - P_2(t)\lambda_B dt - P_2(t)\frac{1}{\Theta_A}dt + P_4(t)\frac{1}{\Theta_B}dt$$

$$dP_3(t) = P_1(t)\lambda_A dt - P_3(t)\lambda_A dt - P_3(t)\frac{1}{\Theta_B}dt + P_4(t)\frac{1}{\Theta_A}dt$$

$$dP_4(t) = P_2(t)\lambda_B dt - P_3(t)\lambda_A dt - P_4(t)\frac{1}{\Theta_A}dt - P_4(t)\frac{1}{\Theta_B}dt$$

Hieruit volgt het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = (-\lambda_A - \lambda_B)P_1(t) + \frac{1}{\Theta_A}P_2(t) + \frac{1}{\Theta_B}P_3(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_A P_1(t) + \left(-\lambda_B - \frac{1}{\Theta_A}\right)\cdot P_2(t) + \frac{1}{\Theta_B}P_4(t)$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_B P_1(t) + \left(-\lambda_A - \frac{1}{\Theta_B}\right)\cdot P_3(t) + \frac{1}{\Theta_A}P_4(t)$$

$$\frac{dP_4(t)}{dt} = \lambda_B P_2(t) + \lambda_A P_3(t) + \left(-\frac{1}{\Theta_A} - \frac{1}{\Theta_B}\right)P_4(t)$$

Stap 4. Begin- en randvoorwaarden.
Beginvoorwaarden: $P_1(0) = 1$, $P_2(0) = 0$, $P_3(0) = 0$, $P_4(0) = 0$.
Randvoorwaarde: $P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + P_4(t) = 1$.

Cur frame Page 173 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Stap 5. Stationaire toestand.
De stationaire oplossing wordt bepaald door in het stelsel differentiaalvergelijkingen de afgeleiden gelijk te stellen aan nul en door één van de vergelijkingen te vervangen door de randvoorwaarde. In dit bijvoorbeeld is het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_A & \left(-\lambda_B - \frac{1}{\Theta_A}\right) & 0 & \frac{1}{\Theta_A} \\ \lambda_B & 0 & \left(-\lambda_A - \frac{1}{\Theta_B}\right) & \frac{1}{\Theta_A} \\ 0 & \lambda_B & \lambda_A & \left(-\frac{1}{\Theta_A} - \frac{1}{\Theta_B}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1(\infty) \\ P_2(\infty) \\ P_3(\infty) \\ P_4(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De oplossing van dit stelsel is:

$$P_1(\infty) = \frac{\frac{1}{\Theta_A}\frac{1}{\Theta_B}}{\left(\lambda_A + \frac{1}{\Theta_A}\right)\left(\lambda_B + \frac{1}{\Theta_B}\right)};\ P_2(\infty) = \frac{\frac{\lambda_A}{\Theta_B}}{\left(\lambda_A + \frac{1}{\Theta_A}\right)\left(\lambda_B + \frac{1}{\Theta_B}\right)};$$

$$P_3(\infty) = \frac{\frac{\lambda_B}{\Theta_A}}{\left(\lambda_A + \frac{1}{\Theta_A}\right)\left(\lambda_B + \frac{1}{\Theta_B}\right)};\ P_4(\infty) = \frac{\lambda_A\lambda_B}{\left(\lambda_A + \frac{1}{\Theta_A}\right)\left(\lambda_B + \frac{1}{\Theta_B}\right)};$$

De gemiddelde niet-beschikbaarheid van het systeem komt overeen met kans $P_4(t)$. Als:

$$\lambda_A \ll \frac{1}{\Theta_A} \quad \text{en} \quad \lambda_B \ll \frac{1}{\Theta_B}$$

dan geldt:

$$P_4(t) = \lambda_A\lambda_B\Theta_A\Theta_B$$

Stap 6. Faalkans.
De faalkans van het systeem kan eveneens met behulp van het Markov-diagram worden bepaald. Hiertoe moet dan echter het Markov-diagram worden aangepast. Door de reparatie-mogelijkheden in toestand 4 te elimineren, wordt bereikt dat de kans $P_4(t)$ gelijk is aan de faalkans op tijdstip t. De som van de kansen $P_1(t)$, $P_2(t)$ en $P_3(t)$ is gelijk aan de betrouwbaarheid van het systeem op het tijdstip t.
Toestand 4 in figuur 6.23 is een zogenoemde absorbtietoestand. De waarde van $P_4(t)$ loopt in de tijd van 0 naar 1. De stationaire situatie heeft in dit geval geen betekenis. Uit het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen:

Cur frame Page 174 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = (-\lambda_A - \lambda_B)P_1(t) + \frac{1}{\Theta_A}P_2(t) + \frac{1}{\Theta_B}P_3(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_A P_1(t) + \left(-\lambda_B - \frac{1}{\Theta_A}\right) \cdot P_2(t)$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_B P_1(t) + \left(-\lambda_A - \frac{1}{\Theta_B}\right) \cdot P_3(t)$$

$$\frac{dP_4(t)}{dt} = \lambda_B P_2(t) + \lambda_A P_3(t)$$

kan met behulp van numerieke methoden het verloop van $P_4(t)$ in de tijd worden berekend.

De meest eenvoudige methode is de benadering met de eerste-orde Taylor-polynoom:

$$P_1(t + \Delta t) = P_1(t) + \Delta t \frac{dP_1(t)}{dt}$$

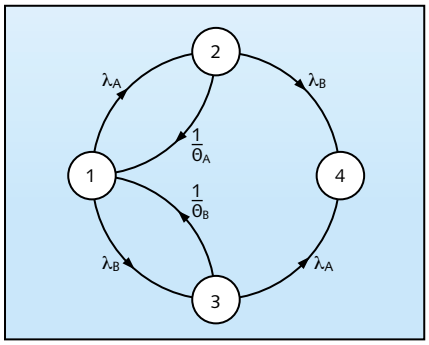
$$P_2(t + \Delta t) = P_2(t) + \Delta t \frac{dP_2(t)}{dt}$$

$$P_3(t + \Delta t) = P_3(t) + \Delta t \frac{dP_3(t)}{dt}$$

$$P_4(t + \Delta t) = P_4(t) + \Delta t \frac{dP_4(t)}{dt}$$

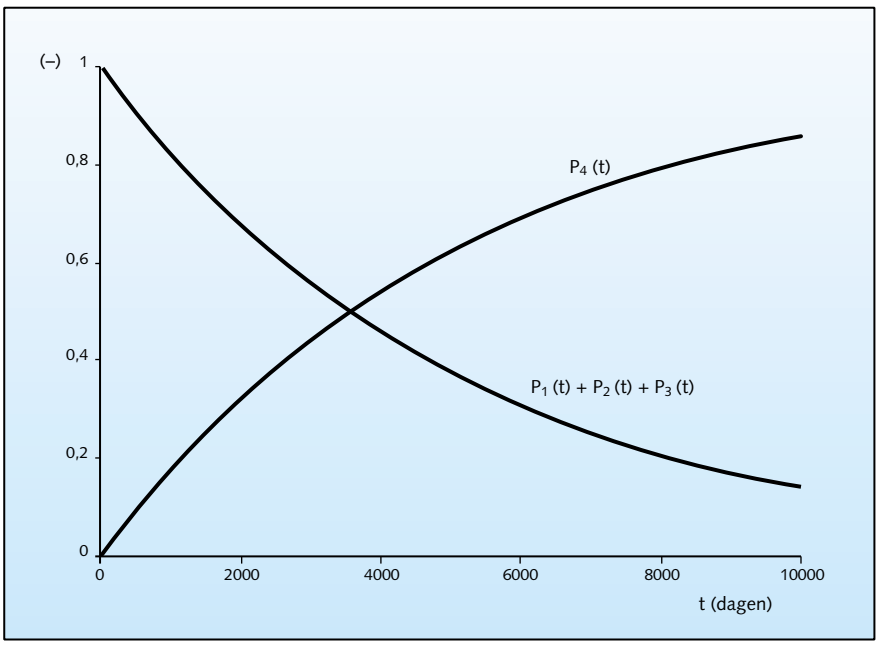
In figuur 6.24 is het verloop van de faalkans en de betrouwbaarheid in de tijd gegeven voor het geval dat:

$$\lambda_A = \lambda_B = 0{,}01 \qquad \text{en} \qquad \Theta_A = \Theta_B = \lambda$$



Figuur 6.23 *Markov-diagram ter bepaling van de faalkans.*

Cur frame Page 175 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 6.24 *Verloop van de faalkans en de betrouwbaarheid in de tijd.*

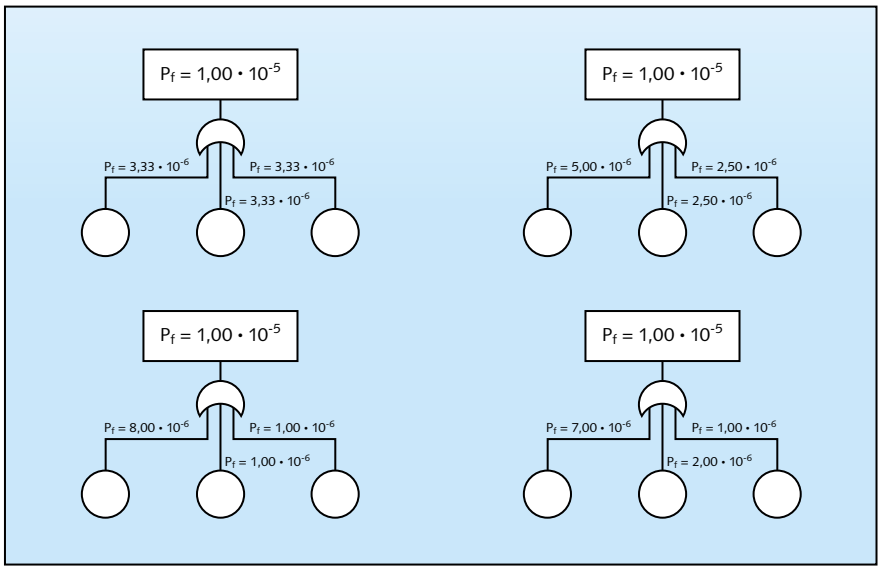
In het voorgaande voorbeeld is uitgegaan van voldoende reparatiecapaciteit om de componenten in het systeem gelijktijdig te repareren. Als dit niet het geval is, zal dit gevolgen hebben voor de niet-beschikbaarheid van het systeem.

6.5 FAALKANSTOEDELING EN SYSTEEMOVERWEGINGEN

6.5.1 FAALKANSTOEDELING

In het voorgaande is aan de orde geweest hoe de faalkans van een systeem kan worden bepaald. Hierbij wordt uitgegaan van de faalkansen en onderlinge relaties van elementen en subsytemen.
Bij het ontwerpen van systemen is het doorgaans de wens om de faalkans van het totale systeem te verdelen over de subsystemen en elementen. Met de aan de subsystemen en elementen toebedeelde faalkansen kan dan de benodigde „sterkte" van de elementen worden bepaald.
In figuur 6.25 is een voorbeeld gegeven van een mogelijke faalkanstoewijzing voor een seriesysteem met onafhankelijke elementen.

Cur frame Page 176 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 6.25 *Faalkanstoedeling bij een seriesysteem met onafhankelijke elementen.*

Uit deze figuur blijkt dat er in principe zeer veel verdelingen van de faalkans mogelijk zijn.
Een toebedeelde eis wordt a priori vastgesteld op basis van:

a. haalbaarheid;
b. economie;
c. (wettelijke) normen;
d. evenwichtigheid en risico-acceptatie.

ad a. *Haalbaarheid*
Het concept of voorontwerp van een subsysteem laat zich over het algemeen snel analyseren met betrekking tot de orde van grootte van de faalkans. Ook is aan te geven in hoeverre verhoging of verlaging van de faalkans door bepaalde maatregelen mogelijk is. Constructies worden „sterker" door meer materiaal en besturingssystemen kunnen worden verbeterd door het aanbrengen van bijvoorbeeld parallelliteit.

ad b. *Economie*
Het is mogelijk de kosten van een subsysteem als functie van een toebedeelde faalkans te bepalen. Van het totale systeem zijn de kosten als functie van de toelaatbare faalkansen dus te berekenen.
Via „trial and error" of meer geavanceerde methoden is een faalkanstoedeling aan de subsystemen te bepalen, waarbij de totale kosten minimaal zijn.

ad c. *(Wettelijke) normen*
Systemen zullen altijd moeten voldoen aan normen op het gebied van (persoonlijke) veiligheid. Daarnaast kan een opdrachtgever bepaalde additionele eisen stellen die van invloed zijn op de faalkanstoedeling.

Cur frame Page 177 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

ad d. *Evenwichtigheid en risico-acceptatie*
Een subjectief aspect is evenwichtigheid. In de praktijk leidt een verschil van meer dan 2 à 3 orden tot een soort acceptatieprobleem.
De neiging bestaat om systemen, die nieuw (innovatief) of uniek zijn, anders te beschouwen dan beproefde subsystemen. In zo'n geval is het niet onlogisch een toebedeelde faalkans laag te kiezen.

Behalve een toedeling naar de subsystemen is het een goed gebruik een reserve van ten minste 20 % toe te delen in verband met nog niet geïdentificeerde faalmechanismen en andere tegenvallers.

Naarmate het ontwerp en inzicht voortschrijdt, worden de faalkansanalyses gedetailleerder. In dergelijke fasen van een project is herverdeling van toebedelingen mogelijk en vaak doelmatig. Uiteindelijk resulteren de toebedeelde faalkansen in berekende of bewezen faalkansen (gegeven de „stand der techniek" van de faalkansanalyse).

6.5.2 SYSTEEMOVERWEGINGEN

Bij de toelaatbaarheid van een faalkans van een subsysteem speelt de configuratie van het totale systeem en belangrijke rol. Serie- of parallelschakeling van subsystemen is van grote invloed op de faalkans. Het komt dikwijls voor dat een subsyteem in een seriesysteem een te grote faalkans heeft. Het verkleinen van de faalkans kan gebeuren door het vergroten van de betrouwbaarheid van de elementen van het subsysteem. De kosten die hiermee gepaard gaan kunnen zeer hoog zijn, omdat bijvoorbeeld uitzonderlijke technieken moeten worden toegepast.
Om dergelijke omstandigheden te voorkomen, kan het beter zijn het systeem aan te passen door bijvoorbeeld het subsysteem dubbel uit te voeren als parallelsysteem.
Bij een dergelijke oplossing moet echter rekening worden gehouden met de zogenoemde „common mode failure" en „common cause failure" (zie 6.3.1.). Het toepassen van identieke subsystemen kan leiden tot common mode failure.
Wanneer er sprake is van common cause failure is het vergroten van het systeem door het creëren van parallelle subsystemen niet effectief. In een dergelijk geval moet de betrouwbaarheid van het subsysteem worden vergroot om de faalkans te verkleinen.

LITERATUUR

Aanbevolen literatuur:

6.1. DITLEVSEN, O., Fundamentals of second moment structural reliability theorie. International Research Seminar on Safety of structures, Trondheim, 1977.
6.2. HOHENBICHLER, M. en R. RACKWITZ, First-order concepts in system reliability. Structural Safety 1, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1983.

Geraadpleegde literatuur:

6.3. THOFT-CHRISTENSEN, P. en M.J. BAKER, Structural reliability theorie and its applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, maart 1982.
6.4. VROUWENVELDER, A.C.W.M. en J.K. VRIJLING, Probabilistisch ontwerpen. Technisch Universiteit Delft, Faculteit der Civiele Techniek, Delft, september 1987.
6.5. ROOS, A.J. de, Methods for determining and processing probabilities. Secretary of labour, Voorburg, 1985.

Cur frame Page 178 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Flood probe delays Bonn office repairs

Renovations to the luxurious and expensive Schurmann building in Bonn damaged by Christmas floods will not begin until April at the earliest, the German federal building ministry has said. The giant Rhineside office block suffered disruption from groundwater heave.

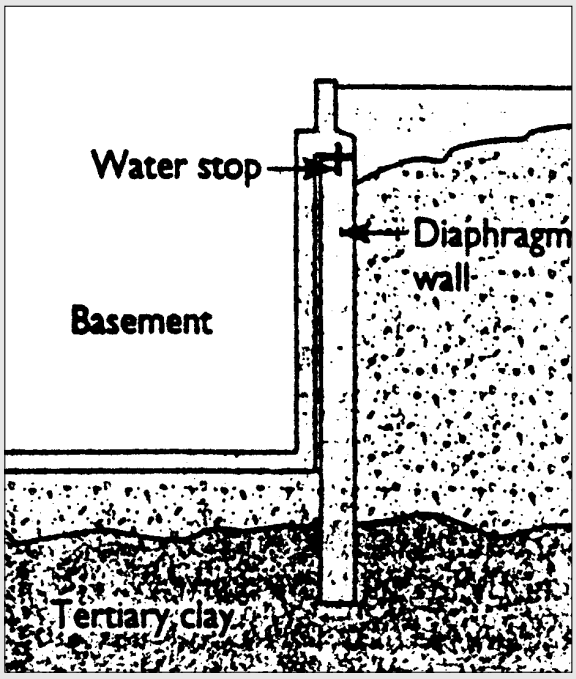
The Bundesministerium für Raumordnung Bauwesen und Stadtbau has appointed a specialist consultancy from Munich to assess damage and consider renovation methods for the estimated DM600M-DM700M ($450M) building which was to be for government use. But the firm, Obermeyer Plannen plus Beraten, must wait until judicial and expert investigators have examined the site before it can begin work in detail.

The expert testimony is going to be crucial in likely court battles over who was to blame for damage which occurred when water penetrated a deep basement excavation and exerted a powerful uplift on the already made basement, tilting the whole construction. The basement would have housed carparks.

Just what happened is not in contention. According to the building ministry a night watchman heard "groaning and creaking" noises from the basement slab area some hours after the Rhine had topped the record flood levels of 1926 by 30mm. Because some sort of uplift seemed to be happening, the basement construction was flooded to cut buoyancy, at the cost of destroying already installed electrical systems.

Construction was taking place inside a diaphragm wall which penetrated 2m into impervious Tertiary clays beneath the site and which reached to 51,1m or 2m lower than the 1926 flood of 53,35m. Inside this excavation the basement box was built and this then extended out in a kind of waling beam over the top of the diaphragm wall (see diagram). The box and the diaphragm were linked with a water stop which took the protection level against high water to 53.85m, giving a half a metre safety margin over the 1926 flood.

The building ministry says that after nearly two weeks of speculation in the wake of the record floods, on how there could have been water ingress, it was admitted by the contractors that the water stop had not been completed around



the whole perimeter in time for the flood season.

The management team on the project, formed from a group of different German and Dutch contractors, said that at one place there was an uncompleted breach which could have allowed floodwater to flow in underneath the basement box.

Just who is responsible for this error and the delay in reporting it may be a long time in the deciding. According to the main ministry in Bonn inadequate communication within the contractors management structure meant that inspection procedures on site allowed the failure to complete the waterstop to be overlooked resulting in massive damage and disruption to a project which had already cost DM272M.

How that came about may itself be a political hot potato. The project was being done under a half privatised system whereby the ministry's building control administration, the Bundesbaudirektion, had appointed outside contractors to a series of separate contracts. They then had formed an unusual joint management grouping, though not a consortium, to control the day to day activity answering to the administration.

Adrian Greeman

Bron: Construction Today, March 1994

Cur frame Page 179 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Hoofdstuk 7: Betrouwbaarheid van corrigeerbare systemen

7.1 INLEIDING

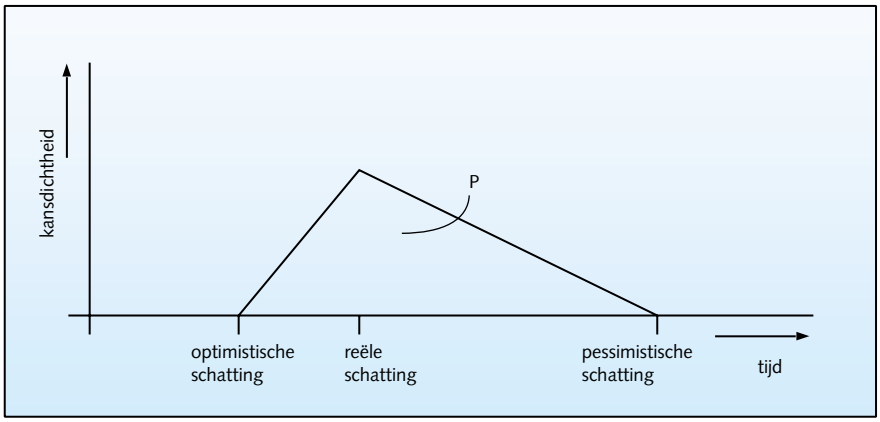
In de hoofdstukken 5 en 6 is de betrouwbaarheid van systemen en processen aan de orde geweest. In de gegeven methoden voor het bepalen van de betrouwbaarheid en het risico is steeds uitgegaan van een oncorrigeerbaar proces. In hoofdstuk 4 is, door het nemen van beslissingen voorafgaand aan een periode, de beïnvloeding van een proces of systeem beschouwd.
Het probleem van mogelijke correcties in de beschouwde periode is nog niet aan de orde geweest. In veel gevallen is het namelijk mogelijk om belastingen of sterkte van een systeem tijdens het proces te corrigeren. Goede voorbeelden hiervan zijn het managen van het uitvoeringsproces van projecten en het plegen van onderhoud aan een willekeurig systeem, waardoor de risico's worden beheerst.
In dit hoofdstuk zal aan de hand van deze twee voorbeelden het effect van corrigerende maatregelen ten aanzien van de belasting of de sterkte worden geïllustreerd.

7.2 PLANNEN VAN DE UITVOERING VAN ACTIVITEITEN

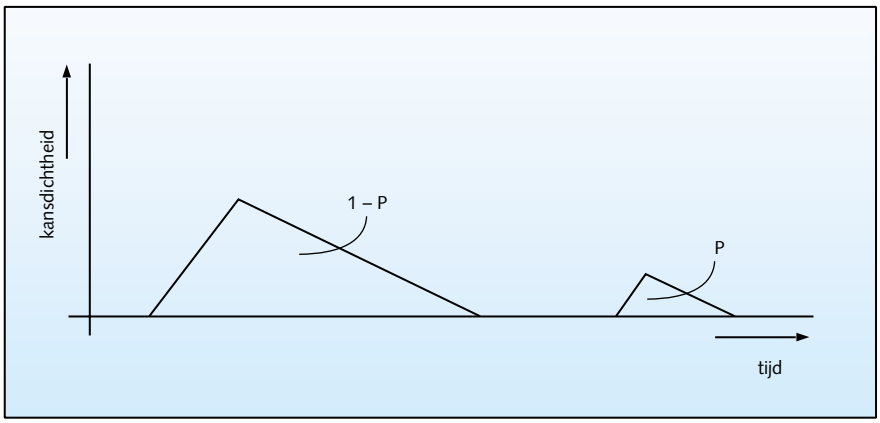
7.2.1 INLEIDING PLANNEN VAN ONZEKERHEDEN

Bij nagenoeg alle uitvoeringsprocessen is de benodigde tijdsduur vooraf niet exact te bepalen. De benodigde tijdsduur is het resultaat van een stochastisch proces dat door verschillende onzekerheden wordt bepaald.
In een stochastische planning wordt de beschikbare of gewenste duur van het project beschouwd als de sterkte en de duur van de activiteiten als de belasting.
De kansverdeling en de bijbehorende parameters van de duur van een activiteit kunnen bijvoorbeeld worden bepaald uit historische gegevens of door het maken van schattingen op basis van ervaring.
De kansverdeling die de tijdsduur beschrijft zal naar links begrensd zijn, omdat altijd sprake is van een minimale uitvoeringsduur. Uit de praktijk blijkt dat de kans dat een activiteit langer duurt dan gepland groter is dan de kans dat de activiteit korter duurt. De kansdichtheidsfunctie van de benodigde tijdsduur zal daarom scheef naar rechts zijn.
Als de kansverdeling van de duur van een activiteit niet kan worden bepaald uit statistisch materiaal, is de driehoekige verdeling een veel gebruikte verdeling voor de beschrijving van de activiteitsduur (zie bijlage B). De drie parameters van de verdeling kunnen worden bepaald door een optimistische, pessimistische en meest reële schatting te maken van de activiteitsduur (zie fig. 7.1).
De kansdichtheidsfunctie van een activiteit is niet altijd continu. Als bijvoorbeeld een bijzondere gebeurtenis optreedt, kan een extra inspanning en dus extra tijdsduur nodig zijn. Het optreden van de bijzondere gebeurtenis en de daaruit volgende extra inspanning zijn doorgaans stochastisch.
Een voorbeeld van een activiteit met een discontinue kansdichtheidsfunctie is een proces dat na voltooiing wordt gekeurd. Als de activiteit wordt goedgekeurd, is het proces voltooid. Wordt de activiteit afgekeurd (bijzondere gebeurtenis), dan moet extra tijd worden besteed.
Een voorbeeld van een dergelijke kansdichtheidsfunctie is in figuur 7.2 geschetst, hierin is P de kans dat het product wordt afgekeurd.

Cur frame Page 180 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 7.1 *Driehoekige verdeling voor de beschrijving van de activiteitsduur.*

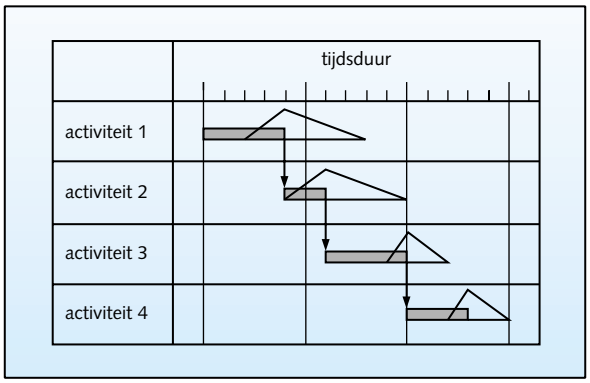


Figuur 7.2 *Discontinue kansdichtheidsfunctie voor de tijdsduur.*

Omdat onzekerheden in de doorlooptijd van uitvoeringsprocessen bijna altijd effect hebben op de kosten, is inzicht in de onzekerheden nodig om een project beheersbaar te maken.

De onzekerheid in de tijd kan worden aangegeven in een probabilistische planning. Voordat het project is gestart, geeft de planning inzicht in de kansverdeling van de totale projectduur. Tijdens het project kan de planning worden gebruikt om de voortgang te toetsen èn om tijdig corrigerende maatregelen te nemen. Voor het opzetten van een planning wordt een project opgedeeld in deelactiviteiten. Hierbij is het niveau, waarop het project in deelactiviteiten wordt uitgewerkt, afhankelijk van de fase waarin het project verkeert. Naarmate het project vordert, kan een bijstelling van de planning worden gemaakt. Als de planning meer in detail is uitgewerkt, zullen de onzekerheden met betrekking tot de totale projectduur afnemen. Toch blijft een spreiding rond de geschatte totale projectduur bestaan.
In een deterministische planning wordt de totale projectduur bepaald door de som van de doorlooptijd van alle activiteiten op het kritieke pad. Een activiteit ligt op het kritieke pad als een verandering van de doorlooptijd van deze activiteit direct invloed heeft op de totale projecttijd.
In de meest eenvoudige vorm bestaat een planning uit een opeenvolging van een aantal uitvoeringsprocessen. In figuur 7.3 zijn vier activiteiten weergegeven die achtereenvolgens moeten worden uitgevoerd om het totale project te voltooien.

Cur frame Page 181 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

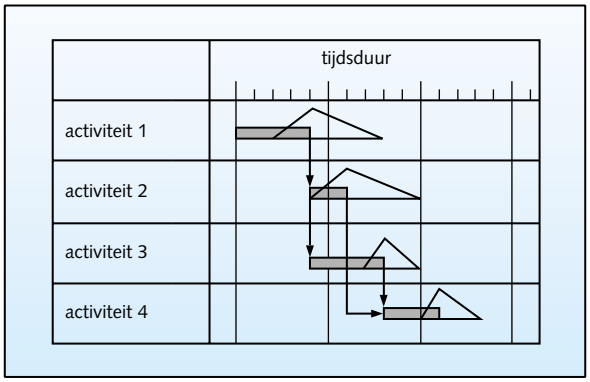


Figuur 7.3 *Planning met vier serie-activiteiten.*

De totale projectduur volgt uit de rekenregels voor een seriesysteem en is gelijk aan:

$$T_{project} = T_{act_1} + T_{act_2} + T_{act_3} + T_{act_4} \tag{7.1}$$

Het berekenen van de totale projectduur wordt minder eenvoudig als bepaalde activiteiten gelijktijdig worden uitgevoerd. In figuur 7.4 is een planning geschetst, waarin de activiteiten 2 en 3 gelijktijdig starten, nadat activiteit 1 is voltooid.



Figuur 7.4 *Planning met serie- en parallelle activiteiten.*

In een probabilistische planning kan door de spreiding in de tijdsduur van de activiteiten, in tegenstelling tot een deterministische planning, het kritieke pad niet op voorhand worden aangewezen. Elk pad kan met een bepaalde kans het kritieke pad zijn.
De totale projectduur volgt uit een combinatie van de rekenregels voor het serie- en parallelsysteem, in dit geval:

$$T_{project} = \max\begin{pmatrix} T_{act_1} + T_{act_2} + T_{act_4} \\ T_{act_1} + T_{act_3} + T_{act_4} \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

Cur frame Page 182 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Het totale project is voltooid vóór een bepaald tijdstip als alle mogelijke paden vóór dit tijdstip zijn voltooid. Voor elk pad kan de kans op overschrijden van een bepaalde duur worden berekend. De kans dat het project binnen een vooraf vastgestelde tijdsduur gereed is, is de kans dat alle paden voltooid zijn voor de bewuste einddatum:

$$P(T_{project} \leq T_{gewenst}) = P(pad_1 \leq T_{gewenst} \cap pad_2 \leq T_{gewenst} \cap \ldots \cap pad_n \leq T_{gewenst}) \quad (7.3)$$

In verband met de afhankelijkheid van de diverse paden leent een Monte Carlo simulatie zich het beste voor de berekening van deze kans (zie hoofdstuk 6).

7.2.2 INVLOED VAN CORRIGERENDE MAATREGELEN OP TIJDSDUUR EN KOSTEN

Als de beschikbare tijd voor een bepaalde activiteit sterk wordt overschreden, zullen corrigerende maatregelen worden genomen om een overschrijding van de totaal beschikbare tijd te voorkomen. Het sneller uitvoeren van de vervolgactiviteiten door bijvoorbeeld het inzetten van een dubbele ploeg of extra materieel kan een oplossing bieden.
Voor het opnemen van corrigerende maatregelen in de planning moeten naast de „normale" activiteiten de „corrigerende" activiteiten worden opgenomen.
Voor het berekenen van de kansverdeling van de totale projectduur uit een planning, waarin corrigerende maatregelen zijn opgenomen, kan eenvoudig gebruik worden gemaakt van de Monte Carlo methode.

VOORBEELD 7.1

Gevraagd is om voor een project de kansverdeling van de tijdsduur en de kosten te bepalen. Het project bestaat uit drie deelactiviteiten. Afhankelijk van de doorlooptijd van activiteit 1 zijn voor activiteit 2 twee scenario's mogelijk. Als activiteit 1 een vooraf vastgestelde grenswaarde niet overschrijdt, wordt voor activiteit 2 een normale doorlooptijd aangehouden. Wordt de grenswaarde wel overschreden, dan wordt activiteit 2 versneld uitgevoerd.
De benodigde tijdsduur per activiteit wordt gemodelleerd door drie schattingen, namelijk een optimistische, een pessimistische en een meest reële schatting. Aangenomen wordt dat de kansdichtheid voor de activiteiten driehoekig is verdeeld.
Als activiteit 1 wordt voltooid in minder dan zes dagen, wordt voor activiteit 2 de normale doorlooptijd toegepast. Duurt activiteit 1 langer, dan wordt activiteit 2 versneld uitgevoerd.
De projectplanning is weergegeven in figuur 7.5.
Verder worden de kosten per activiteit bepaald volgens:

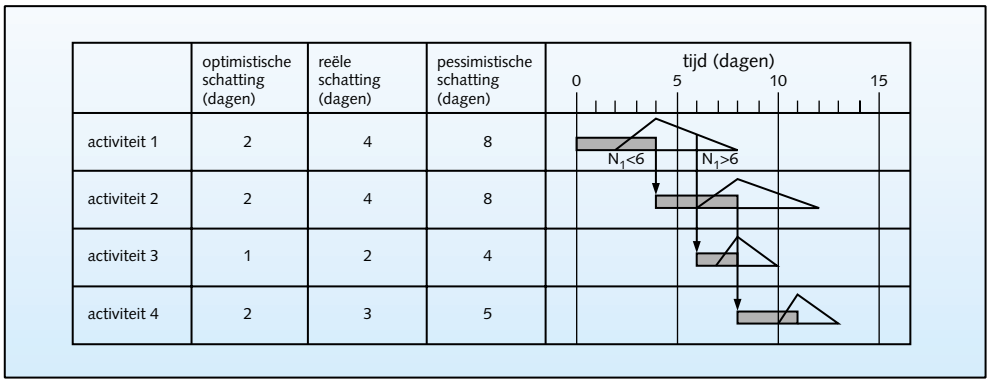
$$K_{act_i} = K_{vast_i} + K_{var_i} T_i$$

waarin:

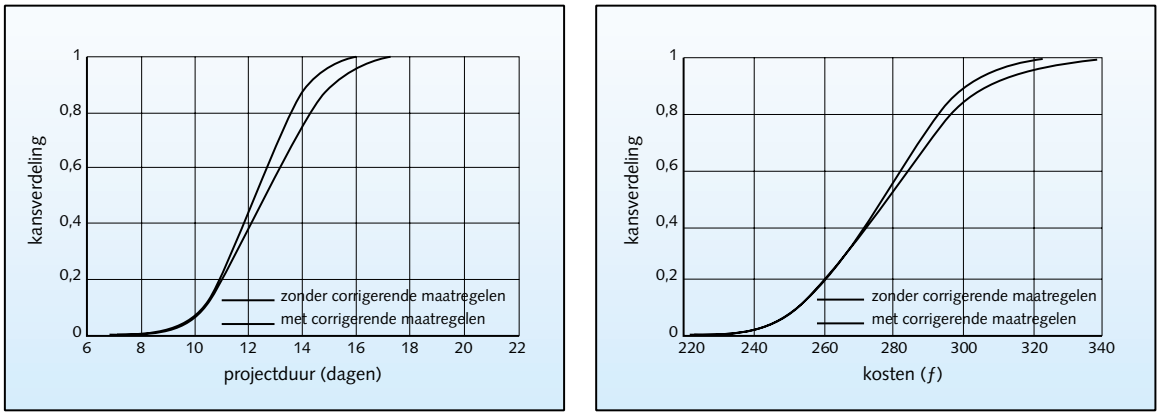
K_{act_i} is kosten activiteit i;
K_{vast_i} is vaste kosten activiteit i;
K_{var_i} is variabele kosten activiteit i;
T_i is duur activiteit i.

Cur frame Page 183 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Een overzicht van de vaste en variabele kosten is gegeven in tabel 7.1.
Voor de realisatie van het project is een maximale duur van 14 dagen en een maximale kostprijs van ƒ 300,– taakstellend. Onderzocht moet worden wat het effect is van het versneld uitvoeren van activiteit 2.
Met behulp van simulatie van de stochastische variabelen is een schatting gemaakt van de kansverdeling van zowel de tijdsduur als de kosten (zie fig. 7.6) voor het geval met en zonder versneld uitvoeren van activiteit 2.
Uit deze figuur blijkt dat de kans op een tijdsoverschrijding kleiner wordt, maar dat de kans met betrekking tot een overschrijding van de kosten groter wordt als activiteit 2 versneld wordt uitgevoerd wanneer activiteit 1 langer duurt dan 6 dagen.



Figuur 7.5 *Projectplanning met corrigerende maatregelen.*



Figuur 7.6 *Kansverdelingsfunctie van tijdsduur en kosten.*

Cur frame Page 184 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Tabel 7.1 *Vaste en variabele kosten per activiteit.*

	activiteit	K_{vast} (*f*)	K_{var} (*f*)
	activiteit 1	40,–	10,–
	activiteit 2 normale doorlooptijd	30,–	10,–
	activiteit 2 versnelde doorlooptijd	30,–	25,–
	activiteit 3	80,–	10,–

Het optreden van calamiteiten tijdens de uitvoering van een project heeft doorgaans een belangrijke invloed op de projectkosten en de projectduur. Omdat calamiteiten een kleine kans van voorkomen hebben, ontbreken deze in de „normale" tijdsplanning. De kansverdeling berekend aan de hand van deze planning is dus een voorwaardelijke kansverdeling; deze geeft namelijk de onderschrijdingskansen van de projectduur als geen calamiteiten optreden. Het optreden van calamiteiten en de mogelijke gevolgen voor tijd en kosten moeten apart worden beschouwd met bijvoorbeeld een gebeurtenissenboom, waarbij onder de verschillende gebeurtenissen een aparte planning ligt.

7.3 ONDERHOUD

7.3.1 INLEIDING ONDERHOUDSSTRATEGIEËN

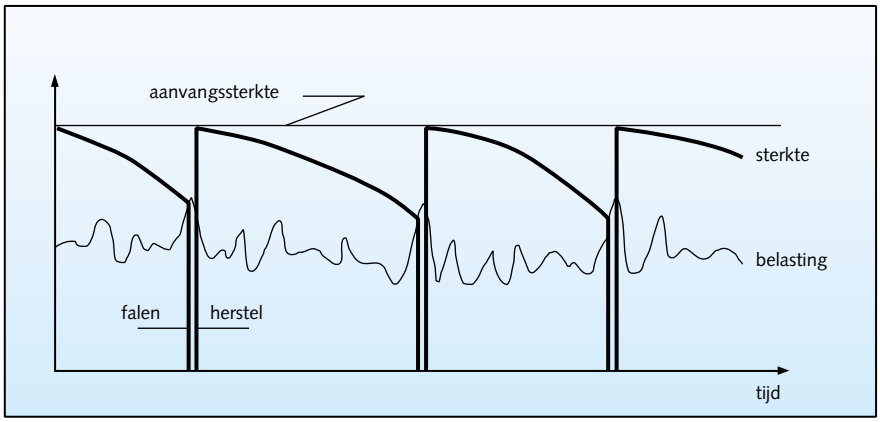
Onder onderhoud wordt verstaan: alle activiteiten die ten doel hebben een object in de technische staat te houden of terug te brengen, die nodig wordt geacht voor de door het object te vervullen functie.

Om de onderhoudskosten te minimaliseren, wordt gezocht naar de optimale onderhoudsstrategie. Vanuit de onderhoudstheorie uit de werktuigbouwkunde is de volgende indeling van strategieën bekend:

1. Curatief onderhoud: – storingsafhankelijk onderhoud.
2. Preventief onderhoud: – gebruiksafhankelijk onderhoud;
   – toestandsafhankelijk onderhoud.

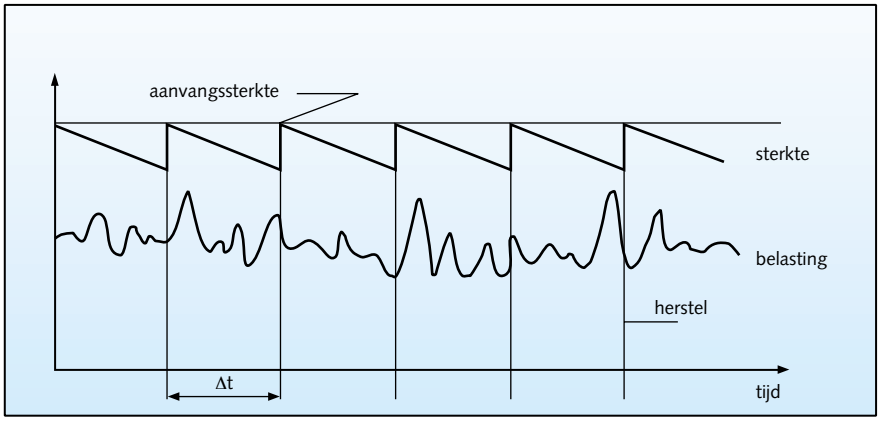
Bij storingsafhankelijk onderhoud wordt een object pas gerepareerd of vervangen, wanneer het zijn functie niet meer kan vervullen (zie fig. 7.7). Er heeft dus herstel plaats na falen, daarom is er sprake van een faalnorm. De levensduur van het object is volledig benut. Er wordt geaccepteerd dat het object faalt. Dikwijls is deze vorm van onderhoud niet toelaatbaar, omdat bijvoorbeeld de gevolgen van falen groot zijn. Wel kan deze vorm van onderhoud worden toegepast op niet-integrerende onderdelen (onderdelen die geen bijdrage leveren aan de faalkans van het geheel). De gevolgen van falen zijn dan gering (mits reparatie of vervanging niet te lang op zich laat wachten).
Bij gebruiksafhankelijk onderhoud wordt na een periode, met een van tevoren vastgelegd aantal gebruikseenheden, onderhoud gepleegd. De kosten van onderhoud en het risico bepalen over het algemeen de lengte van deze periode. De levensduur van het object wordt niet volledig benut.

Cur frame Page 185 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 7.7 *Mogelijk verloop van de sterkte bij storingsafhankelijk onderhoud.*

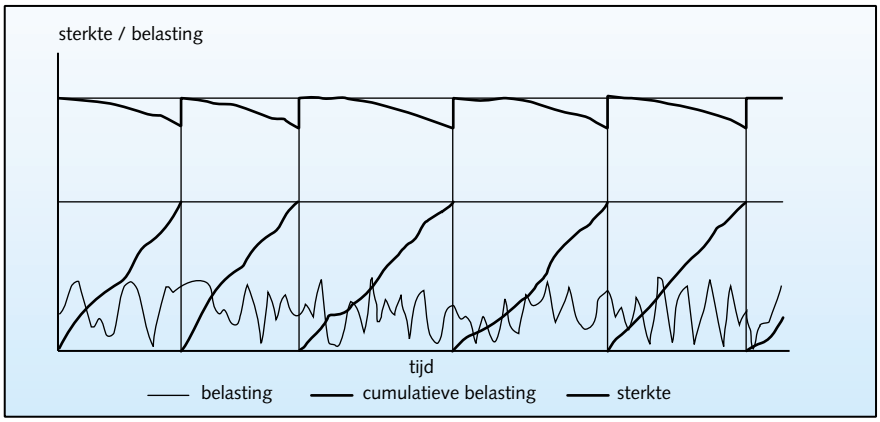
In de werktuigbouwkunde wordt deze vorm van onderhoud toegepast als de gebruikseenheden goed kunnen worden geregistreerd, bijvoorbeeld met een kilometerteller, productteller enzovoorts.
In het algemeen is het niet mogelijk voor een systeem alle belastingen te registreren.
In dit geval wordt gekeken naar de belastingen in een periode als stochastische variabelen. Vervolgens wordt een schatting gemaakt van de levensduur en wordt een tijdstip van herstel bepaald, waarbij een voldoende lage faalkans behoort en waarbij de kosten minimaal zijn.
Beter kan daarom worden gesproken van tijdsafhankelijk onderhoud (zie fig. 7.8). Er is dan sprake van een tijdnorm.



Figuur 7.8 *Mogelijk verloop van de sterkte bij tijdsafhankelijk onderhoud.*

In het geval dat de belastingen, die veroudering veroorzaken, wel worden geregistreerd, kan worden besloten na een extreem hoge belasting of na een bepaalde totale hoeveelheid belasting (cumulatieve belasting) onderhoud te plegen. Er is dan sprake van belastingafhankelijk onderhoud en een belastingnorm.
Voor een geval waarbij de cumulatieve belasting een rol speelt (vermoeiing), is een mogelijk verloop van de sterkte en belasting gegeven in figuur 7.9.

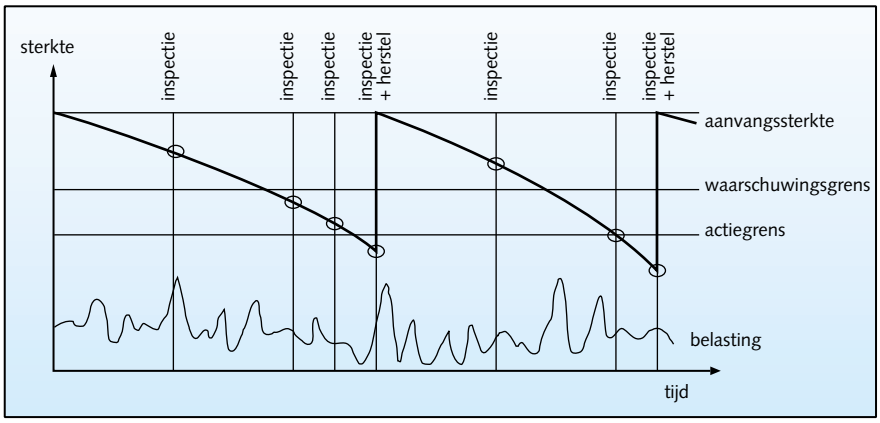
Cur frame Page 186 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 7.9 *Mogelijk verloop van de sterkte bij belastingafhankelijk onderhoud.*

Bij toestandsafhankelijk onderhoud wordt op gezette tijden met inspecties de conditie van het object bepaald. Op grond van waarnemingen wordt besloten of herstel noodzakelijk is of niet. De inspectie-intervallen kunnen constant worden genomen of afhankelijk van de conditie van het object. Er moeten conditie-parameters waarneembaar zijn die de conditie van de constructie weergeven.
De kans op falen in een periode tussen twee inspecties moet voldoende klein zijn. Over het algemeen kan de levensduur van het object beter worden benut dan bij gebruiksafhankelijk onderhoud, maar er moet wel rekening worden gehouden met de kosten van de inspecties.
Bij deze vorm van onderhoud moeten wederom normen worden opgesteld. Deze normen hebben betrekking op (zie fig. 7.10):

> een grenstoestand waarbij wordt besloten tot verhoging van de inspectiefrequentie (waarschuwingsgrens);
> een grenstoestand waarbij wordt besloten tot het plegen van herstel (actiegrens).



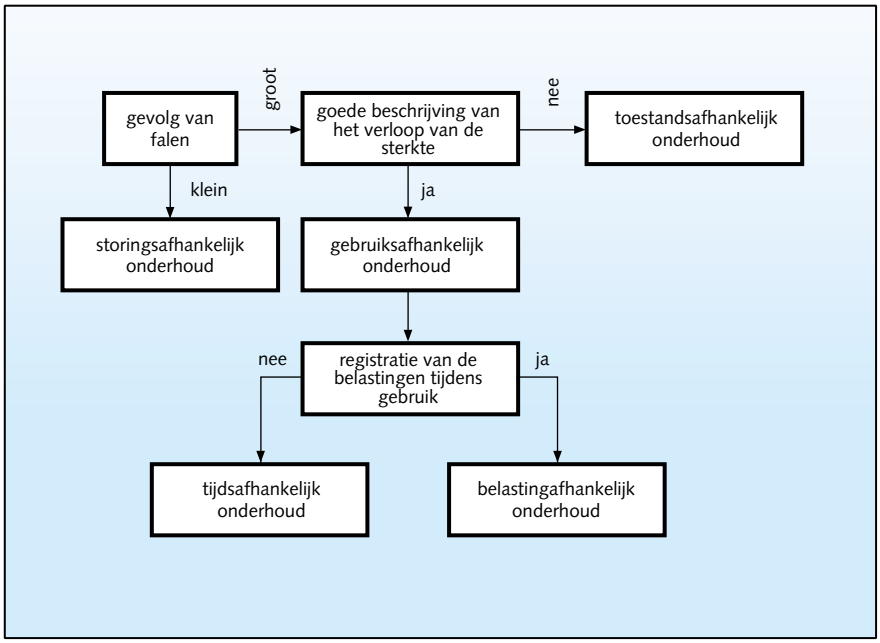
Figuur 7.10 *Mogelijk verloop van de sterkte bij toestandsafhankelijk onderhoud.*

In feite gaat het hier om sterktenormen. Deze normen zijn het resultaat van een optimalisatie van het onderhoud of behoren bij een maatschappelijk geaccepteerde faalkans in een jaar.
De keuze van de te gebruiken onderhoudsstrategie is afhankelijk van factoren, zoals:

Cur frame Page 187 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

> voorspelbaarheid van de levensduur van het object;
> gevolg van het falen van het object;
> kosten van vervanging of reparatie;
> kosten van inspectie;
> waarneembaarheid van de conditie van de constructie (schade of veroudering).

Een eerste vergelijking van de verschillende strategieën met betrekking tot de bruikbaarheid kan worden gemaakt met behulp van figuur 7.11.



Figuur 7.11 *Globale keuze van de onderhoudsstrategie.*

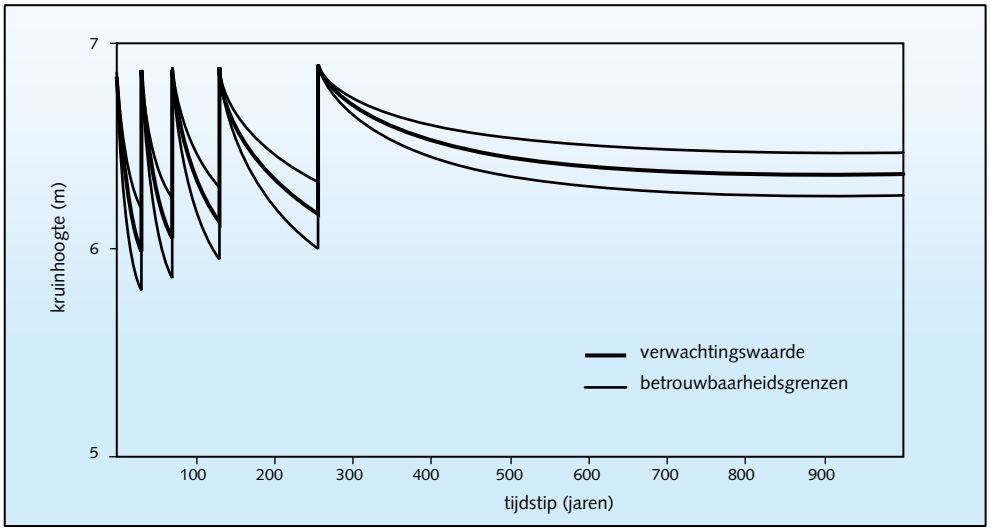
Vaak blijkt een combinatie van twee of meer strategieën een beter resultaat te geven dan het botweg toepassen van een strategie die gekozen is volgens figuur 7.11. Zo kan bijvoorbeeld een planning worden gemaakt volgens de tijdsafhankelijke onderhoudsstrategie, die tussentijds wordt aangepast op grond van waargenomen belastingen, terwijl het besluit tot onderhoud afhankelijk is van een geïnspecteerde sterkte. Op grond hiervan kan worden gesteld dat grenzen van toepasbaarheid van de verschillende strategieën niet scherp zijn.
Over het algemeen is een uitspraak over de gevolgen van falen en daarmee het toestaan van storingsafhankelijk onderhoud wel mogelijk.
De keuze voor tijdsafhankelijk of toestandsafhankelijk onderhoud is minder eenvoudig.
Volledig tijdsafhankelijk onderhoud zal worden toegepast als inspectie niet mogelijk is of als inspectie duur is ten opzichte van herstel.
Volledig toestandsafhankelijk onderhoud zal worden gepleegd, wanneer er totaal geen prognose kan worden gemaakt van het verloop van de sterkte in de tijd of als inspectie zeer eenvoudig en daardoor goedkoop is.

Cur frame Page 188 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Een belangrijk aspect van het toestandsafhankelijke onderhoud is het verzamelen van data met betrekking tot het verloop van de sterkte in de tijd. Hierdoor kan het onderhoud of de inspecties steeds beter worden gepland.

7.3.2 INVLOED VAN ONDERHOUD OP HET RISICO

De invloed van onderhoud op het verloop van de sterkte in de tijd is eenvoudig als door onderhoud de sterkte wordt teruggebracht tot het aanvangsniveau. In de figuren 7.7 tot en met 7.10 is het effect van onderhoud op de sterkte gegeven voor een aantal onderhoudsstrategieën. In figuur 7.8 is sprake van een constant onderhoudsinterval, dat wil zeggen dat tussen de tijdstippen van onderhoud steeds een zelfde periode is aangehouden. Het verouderingsproces (zie 5.5.2) is in elk interval waarschijnlijk hetzelfde en er is daardoor geen reden om het onderhoudsinterval in grootte te variëren.
Het kan voorkomen dat het verouderingsproces in de verschillende intervallen niet gelijk is, bijvoorbeeld omdat de mate van veroudering afhankelijk is van gepleegd onderhoud. Een goed voorbeeld hiervan is het onderhoud van een dijk.
Ten gevolge van het ophogen van een dijklichaam zullen zettingen optreden. De zettingen zijn afhankelijk van de mate van ophogen van de dijk en de spanningstoestand van de ondergrond. De spanningstoestand is afhankelijk van eerder gepleegd onderhoud. In figuur 7.12 is het verloop van de zettingen na het plegen van onderhoud schematisch aangegeven.
De getrokken lijn in figuur 7.12 geeft het verloop van de verwachtingswaarde van de kruinhoogte van de dijk. De stippellijnen geven de spreiding rondom de gemiddelde kruinligging aan. Deze spreiding is het gevolg van de onzekerheden in de grondparameters en de methode, waarmee de zetting is berekend. Uit de figuur blijkt dat ook de spreiding afhankelijk is van het gepleegde onderhoud. Dit heeft zijn oorzaak in het feit dat de berekening kan worden geijkt op de waarnemingen door aanpassing van het verouderingsmodel. De wijze waarop het verouderingsmodel kan worden aangepast, wordt beschreven in de volgende paragraaf.



Figuur 7.12 *Sterktereductie door zettingen.*

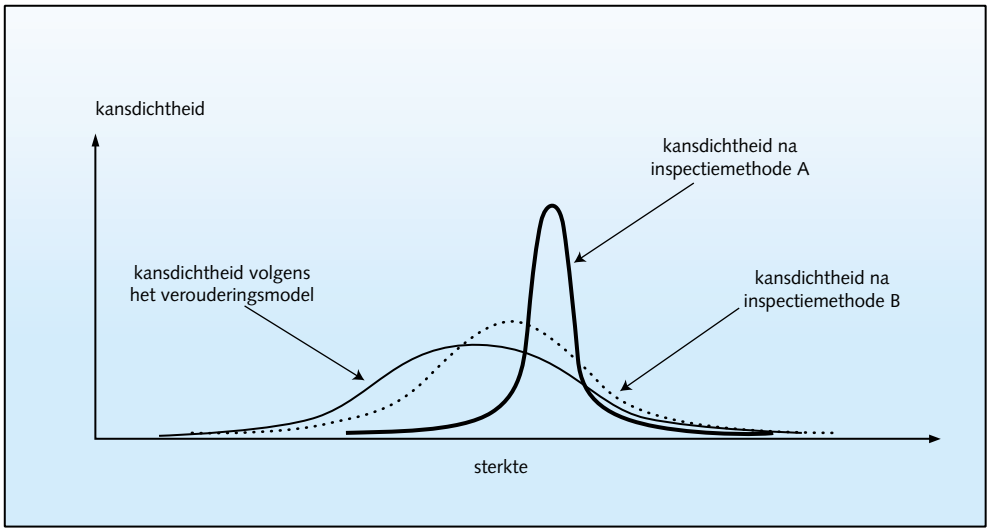
Het risico over een bepaalde vastgestelde periode kan worden berekend door voor elk onderhoudsinterval het risico te berekenen volgens 5.5.3.

Cur frame Page 189 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Het zal duidelijk zijn dat het verkleinen van het onderhoudsinterval het risico reduceert, maar de onderhoudskosten verhoogt. Doorgaans wordt gezocht naar een optimum, waarbij de som van de contante waarde van de onderhoudskosten en het risico het laagst is.

7.3.3 INVLOED VAN INSPECTIES

Met behulp van inspecties kan de sterkte van een systeem op een gegeven tijdstip worden vastgesteld. Hiertoe worden conditieparameters gedefinieerd. In wezen verschillen de conditieparameters niet van de weerstandsparameters, zoals is gedefinieerd bij het verouderingsmodel. Echter de conditieparameters moeten meetbaar zijn met een redelijke nauwkeurigheid. De sterkte, die wordt afgeleid uit deze conditieparameters, mag ook niet een te grote onzekerheid bevatten. Is dit niet het geval dan levert inspectie geen beter inzicht in de conditie van het systeem. In dat geval zal moeten worden gezocht naar betere meetmethoden of andere conditieparameters. In figuur 7.13 is dit geïllustreerd met behulp van twee inspectiemethoden (A en B). Uit de kansdichtheid van de sterkte blijkt dat methode B nagenoeg geen verbetering van de kennis met betrekking tot de sterkte oplevert. Methode A geeft wel een verbeterd inzicht in de sterkte van het systeem.



Figuur 7.13 *Kansdichtheid van de sterkte volgens het verouderingsmodel en twee verschillende inspectiemethoden.*

Het zal duidelijk zijn dat inspectie geen invloed heeft op het verouderingsproces, maar wel op de beschikbare kennis met betrekking tot de modellering van het proces.
Op grond hiervan kan worden besloten om het verouderingsmodel eventueel aan te passen. Of werkelijk moet worden besloten tot het aanpassen van het verouderingsmodel, is sterk afhankelijk van het type verouderingsproces.
In het hiervoor genoemde zettingsproces van een dijklichaam kan het plaatsen en aflezen van zakbaken de nodige informatie verschaffen om de parameters in de zettingsformules te ijken. Hiermee is niet alleen de sterkte van de dijk vastgelegd op het tijdstip van aflezen van de baken, maar kan het verouderingsmodel ook worden verbeterd. Dit leidt tot minder grote onzekerheden in het model, die tot uiting moeten komen in een kleinere variantie van de sterkte in het model.

Cur frame Page 190 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

In het geval dat het verouderingsmodel is gebaseerd op statistische gegevens, kan gebruik worden gemaakt van een speciale techniek om het model aan te passen.
Stel dat op een bepaald moment wordt besloten om te gaan inspecteren. De kansdichtheid van de sterkte op dat moment wordt nog alleen bepaald door het verouderingsmodel. Deze kansdichtheid wordt de „a priori" kansdichtheid van R(t) genoemd. Na inspectie is het mogelijk om met behulp van de inspectieresultaten een betere beschrijving te geven van de sterkte. De methode waarmee dit gebeurt, staat bekend als de „posteriori analyse" of de „terminal analysis". De aan de inspectie aangepaste kansdichtheidsfunctie van de sterkte heet de „a posteriori" kansdichtheid. Voor een beschrijving van deze methode wordt verwezen naar [7.1].
De a posteriori kansdichtheid wordt bepaald met:

$$f_R^{II}(R) = N \; L(X|R) \; f_R^{I}(R) \tag{7.4}$$

waarin:

$f_R^{II}(R)$ is de a posteriori kansdichtheid;
$f_R^{I}(R)$ is de a priori kansdichtheid;
$L(X|R)$ is de likelihood function;
X is de vector met de inspectiewaarden;
N is de normerings constante $= \dfrac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} L(X|R) f_R^{I}(R) dR}$

De likelihood function geeft de kansdichtheid van de vector X bij een gegeven bepaalde waarde van R.
In formulevorm is dit:

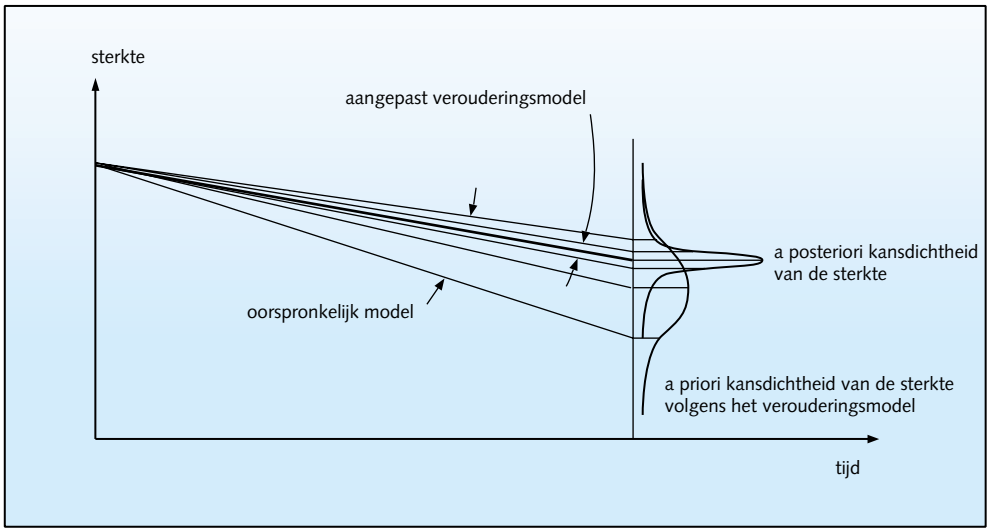
$$L(X|R) = f_I(X_1|R) \; f_I(X_2|R) \ldots f_I(X_n|R) \tag{7.5}$$

waarin:

$f_I(X_i|R)$ is de kansdichtheid van waarneming X_i bij gegeven sterkte R;
X_i is de waarneming van de sterkte.

Na het bepalen van de a posteriori kansdichtheid kan de sterkte op het tijdstip van de inspectie beter worden geschat. Soms is het dan mogelijk om het verouderingsmodel aan te passen, zoals is gedemonstreerd in figuur 7.14.
Het een en ander kan het beste worden verklaard met behulp van een voorbeeld.

Cur frame Page 191 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur 7.14 *Aanpassing van een verouderingsmodel.*

VOORBEELD 7.2

Stel dat van een stalen element in een constructie de sterkte min of meer bekend is op het tijdstip t = 0. Deze bedraagt gemiddeld 130 kN met een standaardafwijking van 1 kN.
Ten gevolge van corrosie neemt de sterkte af met een gemiddelde snelheid van 10 kN/jaar. De standaardafwijking van de afname van de sterkte is $\sqrt{5/3}$ kN/jaar. Aangenomen wordt dat de corrosie onafhankelijk is van de tijd en de reeds opgetreden corrosie. De parameters die van belang zijn voor de beschrijving van de corrosie worden verondersteld constant te zijn, waardoor ook de corrosiesnelheid constant is.
Na drie jaar is de verwachtingswaarde van de sterkte: $\mu R(3) = 130 - 3 \cdot 10 = 100$ kN.
De standaardafwijking van de sterkte is:

$$\sigma_R(3) = \sqrt{1 + \left(3\sqrt{5/3}\right)^2} = 4 \text{ kN}$$

Aangenomen wordt dat zowel de aanvangssterkte als de afnamesnelheid van de sterkte normaal verdeeld zijn.
Hieruit volgt dat de sterkte op tijdstip t ook normaal verdeeld is. De a priori kansdichtheid van de sterkte na 3 jaar is:

$$f'_R(R) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{R-100}{4}\right)^2}$$

Na drie jaar wordt de sterkte van het systeem geïnspecteerd met een niet nader te noemen methode. De methode is niet geheel vrij van meetfouten. De sterkte kan derhalve niet exact worden vastgelegd. Bij een gegeven sterkte kunnen met de inspectiemethode waarden worden

Cur frame Page 192 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

gevonden die, normaal verdeeld, rond de werkelijke sterkte liggen. Hierbij wordt aangenomen dat de waarden zijn verkregen uit onafhankelijke metingen. De standaardafwijking van de verdeling is 2 kN. De sterkte wordt vijf maal gemeten. De metingen zijn respectievelijk 103, 102, 105, 104 en 103 kN.
De a posteriori kansdichtheid is:

$$f''_R(R) = \frac{1}{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(103-R)^2+(102-R)^2+(105-R)^2+(103-R)^2+(104-R)^2}{4}+\frac{(R-100)^2}{16}\right)}$$

$$= \frac{1}{0{,}87287\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(103{,}24-R)}{0{,}87287}\right)^2}$$

Dit is een normale kansdichtheidsfunctie met:

$$\mu_R(4) = 103{,}24 \text{ kN} \qquad \text{en} \qquad \sigma_R(4) = 0{,}87287 \text{ kN}$$

De variantie van de a posteriori kansverdeling is dus aanzienlijk kleiner dan die van de a priori kansverdeling.

In dit voorbeeld is er van uitgegaan dat de inspectiewaarnemingen onafhankelijk zijn. Dit is niet altijd het geval. In dergelijke gevallen levert meer inspecteren geen evenredige verbetering van de kennis van de sterkte op.

LITERATUUR

Aanbevolen literatuur

7.1. BENJAMIN, J.R. en A. CORNELL, Probability, statistics and decision for civil engineers. McGraw-Hill Book Company, New York, 1970.

Geraadpleegde literatuur:

7.2. BUNT, B.P. VAN DEN, Verband tussen zandinhoud van kustprofielen en posities van hoog- en laagwaterlijnen. Technische Universiteit Delft, Delft, juni 1990.
7.3. GYSBERS, F.B.J., Optimalisatie van onderhoud. TNO-IBBC rapport B-86-549, Delft, april 1987.
7.4. VROUWENVELDER, A.C.W.M. en S. LENOS, Optimalisatie van onderhoud – deel II. TNO-IBBC rapport B-87-717, Delft, december 1987.
7.5. KOK, M., Stormvloedkering Oosterschelde, optimaliseren van inspectie en onderhoud natte werken. Waterloopkundig laboratorium, rapport Q 606, Delft, 1988.
7.6. KOK, M., Onderhoud, methoden voor rationeel onderhoud van civiele constructies. Waterloopkundig laboratorium, Delft, september 1990.
7.7. KUIJPER, H.K.T., Onderhoud in de waterbouw, economisch verantwoord plannen van onderhoud. Technische Universiteit Delft, Delft, 1992.

Cur frame Page 193 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Cur frame Page 194 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Ook bij rampenmanagement kunnen probabilistische technieken hun nut bewijzen.

Cur frame Page 195 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Hoofdstuk 8: Toepassingsgebieden

8.1 CONSTRUCTIEVE VEILIGHEID

In beschouwingen over de constructieve veiligheid wordt reeds geruime tijd gebruik gemaakt van probabilistische denkbeelden. In het verleden gebeurde dat echter primair intuïtief, zoals de in de TGB 1964 toegelaten verhoging van de toelaatbare spanning met 25 % bij een zeldzame belastingcombinatie. De laatste jaren wordt echter getracht de onzekerheden steeds meer te kwantificeren, zowel via schattingen door experts als via metingen. Ook wordt een gewenst veiligheidsniveau steeds meer in verband gebracht met de mogelijke schade en de vereiste inspanningen.
In verreweg de meeste gevallen heeft de constructeur zelf weinig met probabilistische methoden en risicoberekeningen te maken. Meestal gebeurt dit op het niveau van de voorschriftenmaker. In de Nederlandse bouwvoorschriften is bijvoorbeeld in NEN 6700 bepaald dat de faalkans voor onderdelen van belangrijke constructies niet groter mag zijn dan 10^{-4} gedurende de levensduur. De verdere normen bevatten echter een uitwerking van deze eis in de vorm van verificatie-eisen met behulp van partiële veiligheidsfactoren. Een ontwerp dat daaraan voldoet, wordt geacht ook aan de basiseis van NEN 6700 te voldoen.
Bij een constructie of belastingen waarvoor (nog) geen rekenregels zijn ontwikkeld, moet in principe worden aangetoond dat voldaan wordt aan de faalkanseis van NEN 6700. Dit kan voorkomen bij bijzondere constructies en bij nieuwe materialen en constructiewijzen, maar ook bij belastingen, zoals golven en stroming of andere natuurlijke randvoorwaarden die niet in de algemene regelgeving passen.

8.2 ONDERHOUD EN BEHEER

Onderhouds- en beheerbeslissingen worden in de regel genomen op basis van vrij eenvoudige principes: men inspecteert grotendeels visueel en herstelt de gevonden gebreken. Alhoewel dit systeem in de praktijk niet eens zo slecht voldoet, komt toch regelmatig de vraag naar voren of dit wel de beste methode is. Dit hangt ook samen met de druk op de budgetten staat. In toenemende mate blijkt er sprake te zijn van zogenoemd achterstallig onderhoud, meestal als gevolg van bezuinigingen.
Er is een groeiende behoefte aan het voorspellen en optimaliseren van het benodigde onderhoud. Het optimaliseren vraagt om een rationele aanpak, waarbij de kosten van onderhoud en inspectie worden afgewogen tegen de baten. Deze baten zijn alleen in risico-analytische termen te omschrijven: een langere levensduur, minder achterstallig onderhoud, minder storingen of een grotere veiligheid. In toenemende mate wordt getracht onderhoud en beheer van bouwconstructies langs deze risico-analytische en functionele werkwijze aan te pakken.

Cur frame Page 196 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

8.3 KWALITEITSZORG

Kwaliteitszorg is een begrip dat zowel in het bedrijfsleven als bij de overheid van belang is. Een veel gebruikte definitie van kwaliteit luidt: „het geheel van kenmerken van een entiteit dat betrekking heeft op het vermogen van die entiteit om kenbaar gemaakte en vanzelfsprekende behoeften te bevredigen" [8.1]. Het woord entiteit is hier gebruikt als verzamelbegrip voor product, proces, organisatie of persoon. Kwaliteitszorg is dan het totaal van activiteiten dat het kwaliteitsbeleid, de doelstellingen en verantwoordelijkheden vaststelt en daarna implementeert. Kwaliteitszorg impliceert zowel kwaliteitsbeheersing (operationele technieken en activiteiten gericht op het controleren van een proces) als kwaliteitsborging. Onder het laatste wordt verstaan alle geplande en systematische activiteiten om in voldoende mate het vertrouwen te geven dat een product, proces, organisatie of persoon aan kwaliteitseisen zal voldoen.
Het kwaliteitsbeleid wordt meestal vastgelegd in een document (kwaliteitshandboek), waarin het kwaliteitssysteem van een organisatie is beschreven. In zo'n kwaliteitshandboek kunnen (verwijzingen naar) procedures en instructies worden opgenomen, die gespecificeerde werkwijzen omvatten voor het uitvoeren van activiteiten.
Een duidelijk waarneembare trend is een toename van het certificeren van publieke en private instellingen in het kader van de kwaliteitsborging. De kwaliteitsborging heeft zijn intrede gedaan in verschillende sectoren, zoals de dienstverlening, de industrie en de handel.
Bij het opstellen van de procedures en werkinstructies kan de risico-analyse een belangrijke rol spelen. Met bijvoorbeeld de kwalitatieve Failure modes and effects analysis (FMEA) worden alle te voorziene afwijkingen en gevolgen in kaart gebracht.
In de FMEA worden tevens acties geformuleerd ter voorkoming van de belangrijkste afwijkingen. Deze acties zijn op te vatten als procedures en werkinstructies en vormen daarmee de basis van de kwaliteitsborging.
Afnemers van producten en diensten hebben het grootste belang bij een leverancier die betrouwbaar en reproduceerbaar kan leveren. Vaak eisen deze van de leverancier dat hij voldoet aan een kwaliteitsnorm (b.v. ISO 9000). Het bewijs van het kunnen voldoen aan de norm wordt gegeven in de vorm van een certificaat. Er zijn slechts enkele tientallen instellingen bevoegd tot het toekennen van een certificaat. De eisen te stellen aan de certificerende instellingen worden in Nederland bewaakt door de Raad voor de Accreditatie.
In kwaliteitsnormen (b.v. NEN-ISO 9004-1) wordt ook aandacht gevraagd voor risico-analyse. Met name bij het ontwerp, de vervaardiging en de verificatie van producten of diensten worden risico-analysetechnieken aanbevolen. Bij productverificatie wordt ook veelvuldig gebruik gemaakt van statistische technieken, zoals bij steekproefsgewijze partijkeuring of continukeuring.
Productveiligheid en het opstellen van noodplannen zijn andere voorbeelden van onderwerpen waarbij de bepalingen in de kwaliteitsnorm met risico-analysetechnieken kunnen worden aangepakt. Daarbij gaat het meestal om inventarisaties en minder om kwantitatieve analyses.

8.4 VEILIGHEIDSMANAGEMENT

In een steeds dichter wordende samenleving is voor veel activiteiten, zoals het verkeer, de industrie en de bouw, behoefte aan een strengere naleving van veiligheidseisen. Naast het voldoen aan normen, moet in veel gevallen worden gestreefd naar een zo hoog mogelijke veiligheid, door toepassing van het ALARA (As Low As Reasonable Achievable) principe. Dit laatste is een continu aandachtsveld met een lonende component. Hierbij speelt de risico-analyse, met als basis de foutenboom, ook wel MORT (Management Oversight and

Cur frame Page 197 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Risk Tree) genoemd, met toevoeging van kennis verkregen uit opgetreden en bijna opgetreden ongelukken, een belangrijke rol. Dit heeft ertoe bijgedragen dat bij tal van activiteiten naast het normale management een actief veiligheidsmanagement wordt gevoerd.
Onder veiligheidsmanagement wordt verstaan het zodanig sturen van processen dat de kans van het ontstaan van ongewenste situaties met betrekking tot de interne en externe veiligheid zo klein mogelijk is. De interne veiligheid is de veiligheid van alle deelnemers aan het proces en de externe veiligheid is de veiligheid voor de omgeving. Veiligheidsmanagement is een vorm van kwaliteitsborging. Net als bij de kwaliteitsborging is er bij het veiligheidsmanagement de behoefte om procedures en werkinstructies te formuleren, waardoor de veiligheid is verzekerd.

Rampenmanagement

Bij het tot stand brengen, uitbreiden, exploiteren, onderhouden of repareren van infrastructuur, gebouwen, industrieën, werktuigen en dergelijke bestaat per definitie een kans op het optreden van de ongewenste topgebeurtenis. Dit heeft gevolgen voor de veiligheid van mens en dier, voor materiële zaken en voor het milieu. Evenals bij veiligheidsmanagement is ook hier sprake van een continu en lerend proces, uiteraard echter gesteund door aanzienlijk minder ervaringsgetallen.

Voorbeelden hiervan zijn:
> dijkdoorbraak;
> bezwijken van een stuwdam;
> explosie bij het vervoer van gevaarlijke stoffen;
> gasverspreiding van chemische industrie;
> neerstorten van een vliegtuig in bebouwd gebied.

Onder rampenmanagement wordt verstaan het zodanig vaststellen en organiseren van maatregelen, dat bij het optreden van een ramp mens en dier worden geholpen en de materiële schade en milieuschade zoveel mogelijk worden beperkt.

Training en opleiding

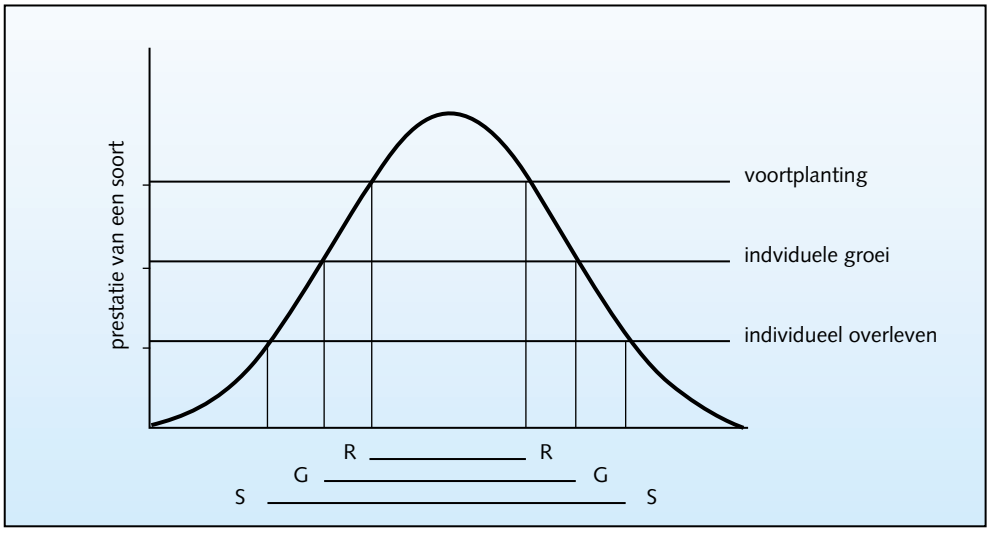
Om economische redenen en in het verlengde van veiligheids- en rampenmanagement is training en opleiding van personen die een proces besturen van belang. Hierbij kan gebruik worden gemaakt van (computer) simulaties. Het gaat daarbij niet alleen om „normale" situaties, maar in het bijzonder om gevallen waarbij zich ongewenste gebeurtenissen voordoen. Met behulp van een risico-analyse kunnen passende handelingen en maatregelen worden vastgesteld.

8.5 TOEPASSING VAN PROBABILISTISCHE TECHNIEKEN MET BETREKKING TOT NATUUR EN MILIEU

Bij vrijwel alle weg- en waterbouwkundige projecten wordt tegenwoordig het effect van de voorgenomen ingreep op het milieu bestudeerd. Vaak ontstaat daarbij een discussie tussen de technici en de ecologen over de schade of het gunstige effect dat door wijziging van de abiotische omstandigheden wordt bewerkstelligd.

Cur frame Page 198 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

In sommige gevallen menen de ecologen dat elke verandering schade aan het levende milieu toebrengt en dat derhalve elke verandering moet worden vermeden. Zo mag de stormvloedkering bij Ramspol in geopende toestand op geen enkele manier de natuurlijke waterspiegelfluctuaties dempen. Daardoor is een grote doorstroomopening vereist.
Anderzijds is men bij natuurinrichtingsprojecten optimistisch over de wijze waarop de natuur bijvoorbeeld herstelde beekmeanders zal koloniseren. In veel gevallen blijkt de natuur inderdaad in staat te zijn de gewenste „oude" toestand te herstellen.
Om tot een goede voorspelling van de positieve of negatieve effecten van waterbouwkundige ingrepen op ecosystemen te komen, kunnen probabilistische methoden een bijdrage leveren. In beide wetenschappen zijn namelijk elementen te herkennen, die als het ware vragen om een probabilistische benadering. Voor zover bekend bij de auteurs is dit nooit in de praktijk gebeurd.
Aan de kant van de waterbouwkunde is het een bekend feit dat variabelen als de waterstand, de watertemperatuur, de golfhoogte en de waterdiepte geen vaste waarden hebben, maar beter kunnen worden gekarakteriseerd door kansdichtheidsfuncties.
In de ecologische literatuur wordt op een soortgelijke manier de reactie van soorten op een abiotische factor als watertemperatuur, stroomsnelheid of zuurgraad weergegeven. Zo'n abiotische milieufactor wordt aangeduid als een „conditie".
Figuur 8.1 is een algemene grafische weergave van de wijze waarop de prestatie van een soort gerelateerd is aan de intensiteit van een milieuconditie.

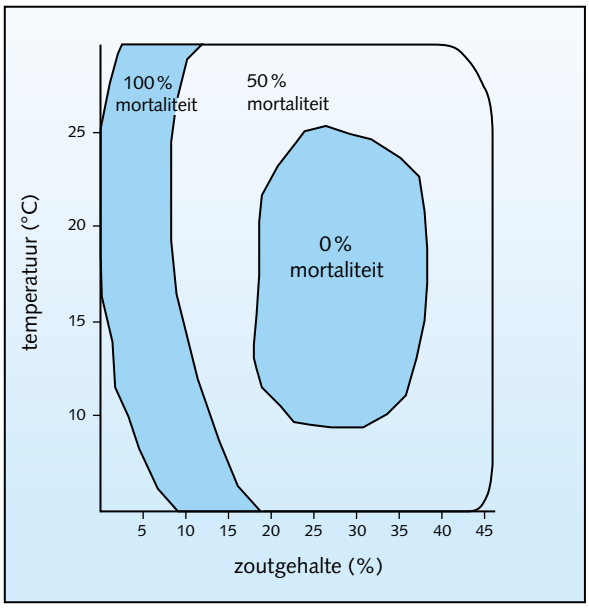


Figuur 8.1 *Prestatie van een soort gerelateerd aan de intensiteit van een milieuconditie.*

De band waarover voortplanting kan geschieden (R – R), dicteert gewoonlijk waar het voortbestaan van de soort mogelijk is, hoewel sommige planten oneindig kunnen voortleven door uitsluitend vegetatieve groei. Soms is de prestatie afhankelijk van twee condities, zoals temperatuur en zoutgehalte in een leefomgeving van garnalen (zie fig. 8.2).
De contouren in figuur 8.2 vertegenwoordigen 0 %, 50 % en 100 % mortaliteit in experimenten in belucht water met ei-dragende vrouwtjes bij een range van temperaturen en zoutgehalten.

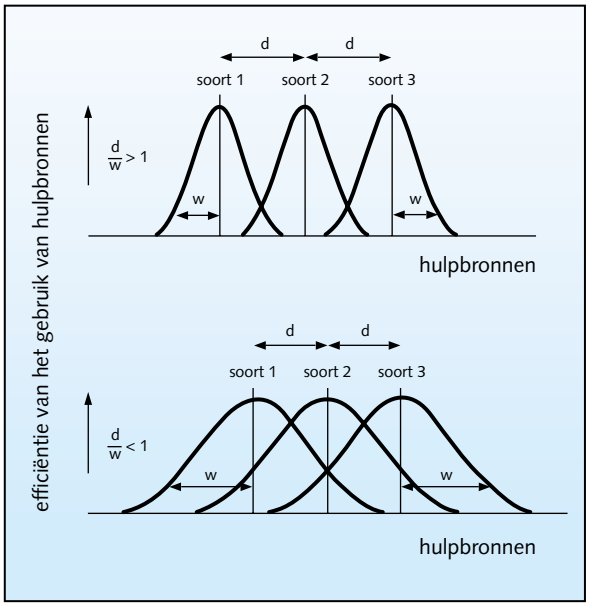
Cur frame Page 199 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Er is sprake van een bepaalde flexibiliteit van de soort ten opzichte van de conditie, die wellicht te beschrijven zou zijn met een kansdichtheidsfunctie. Een soortgelijke flexibiliteit geldt voor het gebruik van schaarse hulpbronnen, zoals voedsel en ruimte. Door de schaarste ontstaat competitie tussen de soorten.



Figuur 8.2 *Prestaties van de garnaal (Crangon septemspinosa).*

Figuur 8.3 toont het gebruik van hulpbronnen door drie soorten die naast elkaar bestaan. Op de horizontale as staat een ééndimensionaal hulpbronspectrum, bijvoorbeeld alle soorten voedsel.



Figuur 8.3 *Het gebruik van hulpbronnen door drie soorten.*

Cur frame Page 200 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De zwaartepunten van de curven en de mate van spreiding (w) van het gebruik van de hulpbronnen zijn te zien als gemiddelden en standaardafwijkingen. Een soort met een grote standaardafwijking heeft een grote flexibiliteit ten aanzien van het gebruik van hulpbronnen.
De overlap van het gebruik van de hulpbronnen wordt bepaald door de afstand tussen de gemiddelden en de grootte van de standaardafwijkingen.
In de bovenste grafiek is sprake van weinig overlap, dat wil zeggen weinig mededinging tussen de soorten.
In de onderste grafiek is de overlap groter, hetgeen een relatief sterkere competitie inhoudt.
Het lijkt een interessante gedachte de kansdichtheidsfunctie van de condities die volgen uit het waterbouwkundig ontwerp met behulp van probabilistische methoden te confronteren met de prestatiekansdichtheidsfuncties van de te handhaven soorten. Zo kan de flexibiliteit van de natuur worden benut bij het ontwerpen en tot stand brengen van ecologisch verantwoorde waterbouwkundige ingrepen.

8.6 GEOSTATISTIEK

Bij het ontwerp van een geotechnische constructie speelt het gehanteerde ondergrondmodel, dat wil zeggen de modellering van de laagopbouw en laageigenschappen, een centrale rol. Onzekerheden in het model van de ondergrond hebben betrekking op:

> de spreiding in parameters (zowel laagopbouw als laageigenschappen), te onderscheiden in trends en statistische variatie;
> discontinuïteiten in de laagopbouw, bijvoorbeeld geulinsnijdingen enzovoorts;
> fouten in de uitvoering van het grondonderzoek.

De onzekerheden in het model van de ondergrond en de relatie met de wijze waarop gegevens worden verkregen (uit geologische voorkennis, uit grondonderzoek en/of uit directe metingen van het gedrag van een geotechnische constructie), zijn al sinds lange tijd onderwerp van studie.
In de nieuwe Technische Grondslagen voor Bouwconstructies is het toepassen van partiële factoren in de geotechniek geïntroduceerd. Hierin is rekening gehouden met zowel de onzekerheid bij het vaststellen van lokale waarden uit waarnemingen (sonderen en het beproeven van monsters) als de ruimtelijke spreiding van geotechnische parameters.
Voor het beschrijven van de ruimtelijke spreiding van geotechnische parameters is vanuit de sector van de mijnbouw en de oliewinning de zogenoemde geostatistiek ontwikkeld. Dit is een stochastische interpolatietechniek, waarin de ruimtelijke correlatiestructuur wordt vastgelegd met een geparametriseerde functie; het variogram. Uitgangspunt in de modellering is de veronderstelling dat het stochastisch deel van het variatiepatroon een zwak-stationair proces is. Dit betekent dat verschillen in een eigenschap tussen twee locaties, afgezien van de trend, alleen afhankelijk zijn van de onderlinge afstand tussen twee locaties.
De eigenschap wordt hierbij gerelateerd aan een bepaald volume, de zogenoemde blokgrootte. Op basis van de waarnemingen op een beperkt aantal locaties, meestal volgens een bepaald raster, kunnen dan contourplots worden gegenereerd van het gemiddelde en de standaardafwijking van bijvoorbeeld de diepteligging van een laag of van een bepaalde laageigenschap in het beschouwde onderzoeksgebied.
Met name in die gevallen waarin geotechnische mechanismen bepalend zijn voor het ontwerp, kan een vergroting van de betrouwbaarheid van het model van de ondergrond met behulp van geostatistische

Cur frame Page 201 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

technieken tot besparingen in het ontwerp leiden. Een andere toepassing is de bepaling van optimale bemonsteringslocaties ten behoeve van geohydrologische of milieutechnische monitoringssystemen.

8.7 BETROUWBAARHEID VAN SOFTWARE

Het gebruik van grote softwarepakketten is in de huidige samenleving niet meer weg te denken. De betrouwbaarheid is van vitaal belang voor de gebruikers ervan. In de praktijk blijkt echter dat software vaak nog veel fouten bevat.
Het correct bewijzen van grote softwarepakketten is door de complexiteit meestal een onmogelijke opgave. In tegenstelling daartoe wordt software, alvorens te worden vrijgegeven, geruime tijd en intensief getest. Het vakgebied dat zich binnen de informatica bezighoudt met de betrouwbaarheid van software heet de „Software reliability". Bij de modellering van software reliability worden vaak foutentellende modellen gebruikt. Dit zijn modellen die uitgaan van het volgende testexperiment. Een computerprogramma wordt gedurende een vooraf gespecificeerde tijd (T) gebruikt. Inputs worden aselect gekozen uit de mogelijkheden die representatief worden geacht voor het gebruik in de praktijk.
Vervolgens produceert het programma hetzij de correcte output, hetzij een softwarefout die optreedt. Dat wil zeggen de software produceert een verkeerd antwoord of helemaal geen output.
Na ontdekking van een softwarefout wordt de executietijd stopgezet en wordt het programma aangepast. Hierna wordt het programma weer hervat met een nieuwe testinput, totdat weer een fout optreedt of de tijd T is verstreken.
Aan de hand van de testprocedure wordt een foutentellend model geschat. Met dit model kunnen vervolgens schattingen worden gegeven van interessante grootheden, zoals de faalintensiteit, de betrouwbaarheid en de gemiddelde tijdsduur tussen twee fouten. Het vakgebied van de software reliability vertoont de laatste 19 jaar een zeer sterke ontwikkeling en tegenwoordig worden vrijwel alle grote softwarepakketten aan betrouwbaarheidscriteria onderworpen.

8.8 CONTRACTVORMING

Bij het tot stand komen van een contract spelen risico's en kansen een grote rol. Steeds vaker wordt voorafgaand aan het afsluiten van een contract een risico-analyse uitgevoerd. Het doel van zo'n analyse kan zowel het inventariseren als het kwantificeren van de risico's zijn. Dergelijke analyses zijn doorgaans toegespitst op de kosten en de kwaliteit van het eindproduct.
Een andere tendens is het formuleren van eisen in het contract met betrekking tot de betrouwbaarheid, de beschikbaarheid en de onderhoudbaarheid. Deze eisen staan bekend als RAM-specificaties (Reliability Availability Maintainability).
Om aan te tonen dat voldaan wordt aan dergelijke specificaties is het noodzakelijk om een risico-analyse uit te voeren. De ervaring leert dat, doordat de risico-analyse meestal wordt uitgevoerd na het stellen van de RAM-specificaties en het aangaan van contractuele verplichtingen, de eisen economisch gezien vaak te hoog zijn. Het is daarom beter om de risico-analyse uit te voeren vóór de formulering van de specificaties.

Cur frame Page 202 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

LITERATUUR

Aanbevolen literatuur:

8.1. NEN-ISO 8402, Termen en definities. 3e druk, oktober 1994.

Geraadpleegde literatuur:

8.2. BEGON, M., J.L. HARPER en C.R. TOWNSEND, Ecology, individuals, populations and communities. Blackwell Scientific Publications, Cambridge, 1990.

Cur frame Page 203 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Bijlage A: Rekenregels van de kansrekening

A1 KANS DAT EEN GEBEURTENIS NIET OPTREEDT

Per definitie zijn E en $\bar{E}$ disjuncte gebeurtenissen en is $E \cup \bar{E} = \Omega$. Omdat $P(\Omega) = 1$ en $P(E \cup \bar{E}) = P(E) + P(\bar{E})$, geldt:

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) \tag{A1}$$

Hieruit volgt verder dat:

$$P(E) \leq 1, \text{ omdat } P(\bar{E}) \geq 0 \tag{A2}$$

$$P(\varnothing) = 0, \text{ omdat } \bar{\Omega} = \varnothing \tag{A3}$$

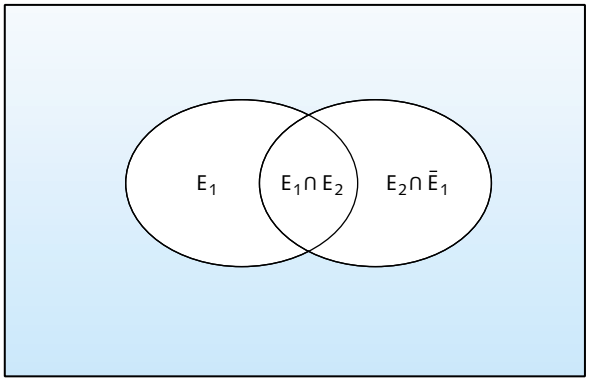
$$P(E_1) \leq P(E_2) \text{ als } E_1 \subset E_2 \tag{A4}$$

A2 KANS DAT MINSTENS ÉÉN VAN TWEE GEBEURTENISSEN OPTREEDT

Beschouwd wordt de vereniging van twee gebeurtenissen $E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 \cap \bar{E}_1)$ (zie fig. A1), zodat geldt:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2 \cap \bar{E}_1)$$

Per definitie is $E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_2 \cap \bar{E}1)$, dus volgt $P(E_2) = P(E_1 \cap E_2) + P(E_2 \cap \bar{E}_1)$.



Figuur A1. *Vereniging van twee gebeurtenissen.*

Cur frame Page 204 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Substitutie geeft de algemene somregel voor de kans dat minstens één van twee gebeurtenissen optreedt:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \tag{A5}$$

A3 VOORWAARDELIJKE KANS

In veel gevallen is men geïnteresseerd in de kans dat een bepaalde gebeurtenis E_2 zal optreden gegeven het feit dat gebeurtenis E_1 heeft plaatsgehad. Dit betekent dat niet elke uitkomst die behoort tot gebeurtenis E_2 nog kan optreden, maar slechts die welke ook behoren tot gebeurtenis E_1; het gaat dus om $E_1 \cap E_2$ als deelverzameling van E_1. In feite is E_1 de nieuwe uitkomstenruimte. De voorwaardelijke of conditionele kans op de gebeurtenis E_2 na optreden van E_1 wordt gedefinieerd als:

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} \tag{A6}$$

waarin $1/P(E_1)$ de reductie van de uitkomstenruimte ten gevolge van het optreden van E_1 in rekening brengt. Als de voorwaardelijke kans $P(E_2 | E_1)$ gelijk is aan de kans $P(E_2)$, zijn de gebeurtenissen E_1 en E_2 stochastisch onafhankelijk.

A4 KANS DAT TWEE GEBEURTENISSEN BEIDE OPTREDEN

De in A3 gegeven definitie van de voorwaardelijke kans kan ook als volgt worden geschreven:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2|E_1) \tag{A7}$$

Hiermee is de kans gedefinieerd dat de twee gebeurtenissen E_1 en E_2 beide optreden.
Overigens geldt uiteraard ook:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2)P(E_1|E_2)$$

Deze formulering kan eenvoudig worden uitgebreid voor verschillende gebeurtenissen, namelijk:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_2 \cap E_1) \cdot \ldots \cdot P(E_n|E_{n-1} \cap E_{n-2} \cap E_{n-3} \cap \ldots \cap E_1)$$

Cur frame Page 205 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

of kortweg:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = P(E_1)\prod_{i=2}^{n}\left(P\left(E_i\middle|\bigcap_{j=1}^{i-1} E_j\right)\right) \tag{A8}$$

De kans dat twee stochastisch onafhankelijke gebeurtenissen beide zullen optreden, is gelijk aan:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) \tag{A9}$$

A5 REGEL VAN DE TOTALE WAARSCHIJNLIJKHEID

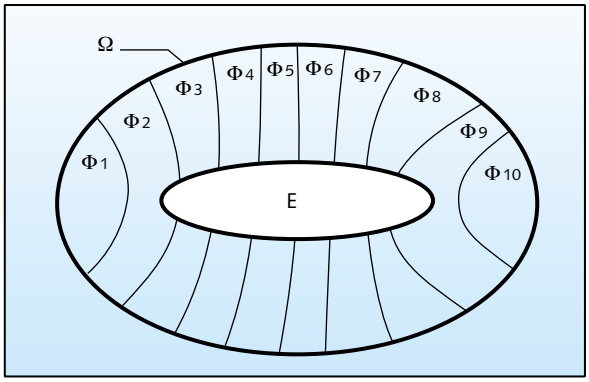
Stel dat de gebeurtenissen Φ_1, Φ_2, ..., Φ_n elkaar uitsluiten en gezamenlijk de totale uitkomstenruimte Ω vormen. Voor iedere gebeurtenis E geldt dan dat (zie fig. A2):

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} (\Phi_i \cap E)$$

Omdat $\Phi_1 \cap E$, $\Phi_2 \cap E$, ..., $\Phi_n \cap E$ elkaar uitsluiten, geldt volgens de voorgaande rekenregels:

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(\Phi_i)P(E|\Phi_i) \tag{A10}$$

Deze definitie staat bekend als de regel van de totale waarschijnlijkheid.



Figuur A2. Totale waarschijnlijkheid.

Cur frame Page 206 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

A6 REGEL VAN BAYES

Met behulp van de definitie van de voorwaardelijke kans kan, voor het in A5 beschreven geval, de kans worden berekend dat een gebeurtenis Φ_j heeft plaatsgehad als is gegeven dat de gebeurtenis E is opgetreden. De voorwaardelijke kans luidt:

$$P(\Phi_j|E) = \frac{P(E \cap \Phi_j)}{P(E)} = \frac{P(\Phi_j)P(E|\Phi_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(\Phi_i)P(E|\Phi_i)} \tag{A11}$$

Deze definitie is bekend als de regel van Bayes. De kansen $P(\Phi_j)$ worden a priori kansen genoemd, terwijl de voorwaardelijke kansen $P(\Phi_j|E)$ bekend zijn als de a posteriori kansen.

Cur frame Page 207 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

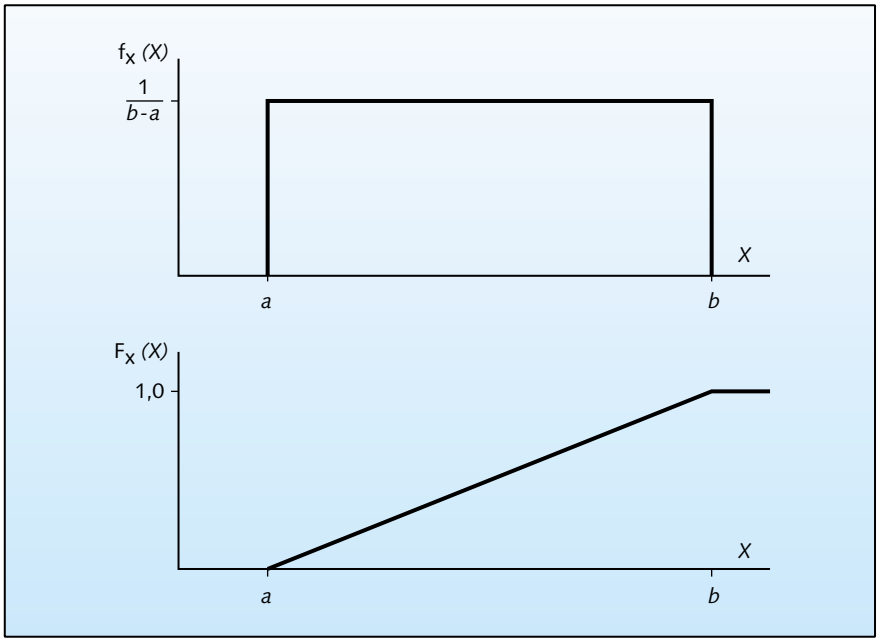
Bijlage B: Enkele veel gebruikte verdelingen

B1 EENVOUDIGE BEGRENSDE VERDELINGEN

B1.1 UNIFORME VERDELING

Als de kans op een uitkomst ligt tussen een ondergrens A en een bovengrens B en elke uitkomst tussen deze grenzen even waarschijnlijk is, dan is er sprake van een uniforme verdeling.
De kansdichtheidsfunctie van de uniforme verdeling is als volgt gedefinieerd (zie ook fig. B1):

$$f_X(X) = \begin{cases} \text{voor } X < A : 0 \\ \text{voor } A \le X \le B : \dfrac{1}{B-A} \\ \text{voor } X > B : 0 \end{cases} \qquad \text{(B1)}$$



Figuur B1. *Kansdichtheidsfunctie en kansverdelingsfunctie van de uniforme verdeling.*

De kansverdelingsfunctie volgt uit integratie over de kansdichtheidsfunctie:

$$F_X(X) = \begin{cases} \text{voor } X < A : 0 \\ \text{voor } A \le X \le B : \dfrac{X-A}{B-A} \\ \text{voor } X > B : 1 \end{cases} \qquad \text{(B2)}$$

Cur frame Page 208 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Het gemiddelde en de variantie van de uniforme verdeling zijn:

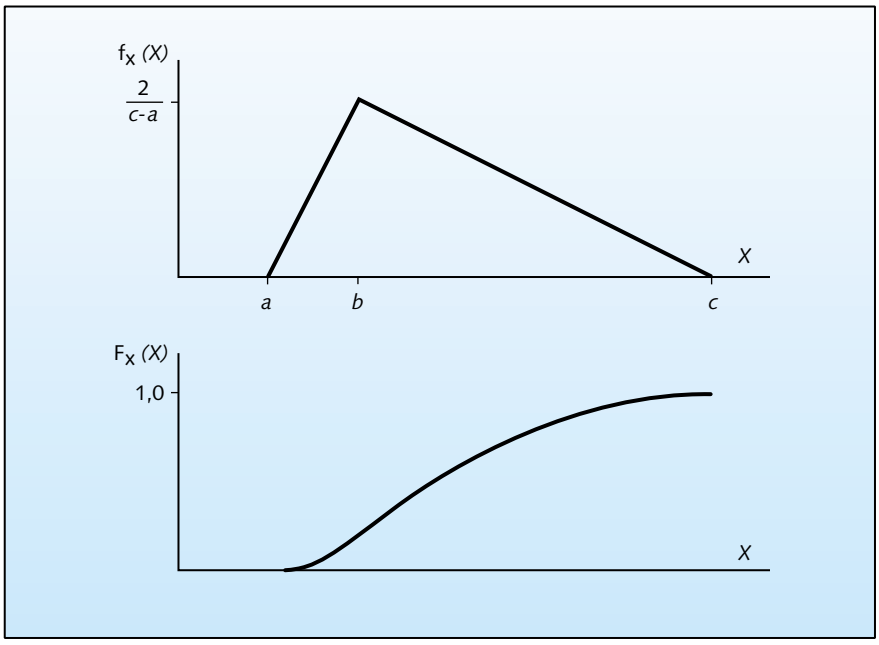
$$\mu_X(X) = \frac{1}{2}(A + B) \tag{B3}$$

$$\sigma_X^2(X) = \frac{(B - A)^2}{12} \tag{B4}$$

B1.2 DRIEHOEKSVERDELING

De driehoeksverdeling is een verdeling die veel gebruikt wordt wanneer een verdeling wordt aangenomen op basis van drie schattingen. Op basis van een meest reële (B), een pessimistische (C) en een optimistische schatting (A) kan dan de kansdichtheidsfunctie worden opgesteld (zie fig. B2):

$$f_X(X) = \begin{cases} \text{voor } X < A : 0 \\ \text{voor } A \le X \le B : \dfrac{2(X - A)}{(A - B)(A - C)} \\ \text{voor } B < X \le C : \dfrac{-2(X - C)}{(A - C)(B - C)} \\ \text{voor } X > C : 0 \end{cases} \tag{B5}$$



Figuur B2. *Kansdichtheidsfunctie en kansverdelingsfunctie van de driehoeksverdeling.*

Cur frame Page 209 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De bijbehorende kansverdelingsfunctie is:

$$F_X(X) = \begin{cases} \text{voor } X < A : 0 \\ \text{voor } A \le X \le B : \dfrac{(X-A)^2}{(A-B)(A-C)} \\ \text{voor } B < X \le C : \dfrac{B-A}{C-A} + \dfrac{-X(X-2C)+B(B-2C)}{(A-C)(B-C)} \\ \text{voor } X > C : 1 \end{cases} \tag{B6}$$

Het gemiddelde en de variantie van de driehoeksverdeling zijn:

$$\mu_X(X) = \frac{A+B+C}{3} \tag{B7}$$

$$\sigma_X^2(X) = \frac{1}{18}(A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC) \tag{B8}$$

B2 NORMALE VERDELING

Een van de meest gebruikte verdelingstypen is de normale verdeling of Gauss-verdeling. De kansdichtheidsfunctie wordt gegeven door:

$$f_X(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp\left(-\frac{(X-\mu_x)^2}{2\sigma_X^2}\right) \tag{B9}$$

In figuur B3 zijn normale verdelingen met verschillende μ_X en σ_X aangegeven.
De normale verdeling met het gemiddelde $\mu_X = 0$ en standaardafwijking $\sigma_X = 1$ wordt de standaard normale verdeling genoemd. De variabele die wordt beschreven door de standaard normale verdeling heet de standaard normale variabele U. Een willekeurige normaal verdeelde variabele kan worden geschreven als:

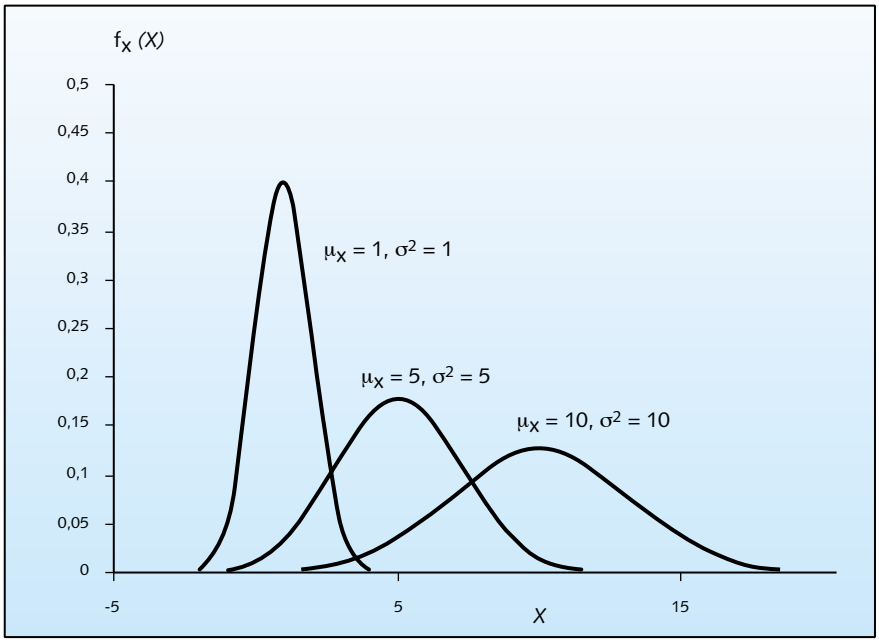
$$X = \mu_X + U\sigma_X \tag{B10}$$

De kansverdelingsfunctie van de normale verdeling is niet analytisch bekend. Wel zijn er numerieke oplossingen voor de standaard normale verdeling, aangeduid met:

$$\Phi_N(U) = P(U < U) = \int_{-\infty}^{U} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{X^2}{2}\right)dX \tag{B11}$$

Cur frame Page 210 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Daar elke normaal verdeelde stochastische variabele X kan worden uitgedrukt in de standaard normaal verdeelde variabele, is het niet noodzakelijk om de kansdichtheidsfunctie van X numeriek te integreren.



Figuur B3. *Normale verdelingen met verschillende μ_x en σ_x.*

Met de bekende oplossingen van $\Phi_N(U)$ in tabelvorm (zie tabel B1) kan de waarde van de kansverdelingsfunctie van X worden bepaald met:

$$F_X(X) = \Phi_N\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right) \qquad \text{(B12)}$$

Cur frame Page 211 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Tabel B1 *Waarden voor $\Phi_N(U)$.*

	U	onderschrijdingskansen standaard normale verdeling									
		0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
	0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
	0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5754
	0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
	0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
	0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
	0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
	0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
	0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
	0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
	0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
	1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
	1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
	1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
	1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
	1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
	1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9430	0,9441
	1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
	1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
	1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9700	0,9706
	1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9762	0,9767
	2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
	2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
	2,2	0,9861	0,9865	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
	2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
	2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
	2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
	2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
	2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
	2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9980	0,9981
	2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
	3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
	3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
	3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
	3,3	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
	3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998
	3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
	3,6	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Cur frame Page 212 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

B3 LOGNORMALE VERDELING

Als een variabele X een lognormale verdeling heeft, dan heeft de variabele Y = ln(X) een normale verdeling. Ofwel X = exp(Y), waarin Y normaal is verdeeld.
Uit vergelijking (B9) volgt:

$$f_X(X) = \frac{1}{X} f_Y = \frac{1}{X} \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right) = \frac{1}{X} \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln X-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right) \quad \text{(B13)}$$

Als het gemiddelde en de standaardafwijking van Y bekend zijn, kunnen die van X worden bepaald met:

$$\mu_X = \exp\left(\mu_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2\right) \quad \text{(B14)}$$

$$\sigma_X = \mu_X \sqrt{\exp(\sigma_Y^2) - 1} \quad \text{(B15)}$$

Omgekeerd geldt:

$$\sigma_Y = \sqrt{\ln\left(1 + \left(\frac{\sigma_X}{\mu_X}\right)^2\right)} \quad \text{(B16)}$$

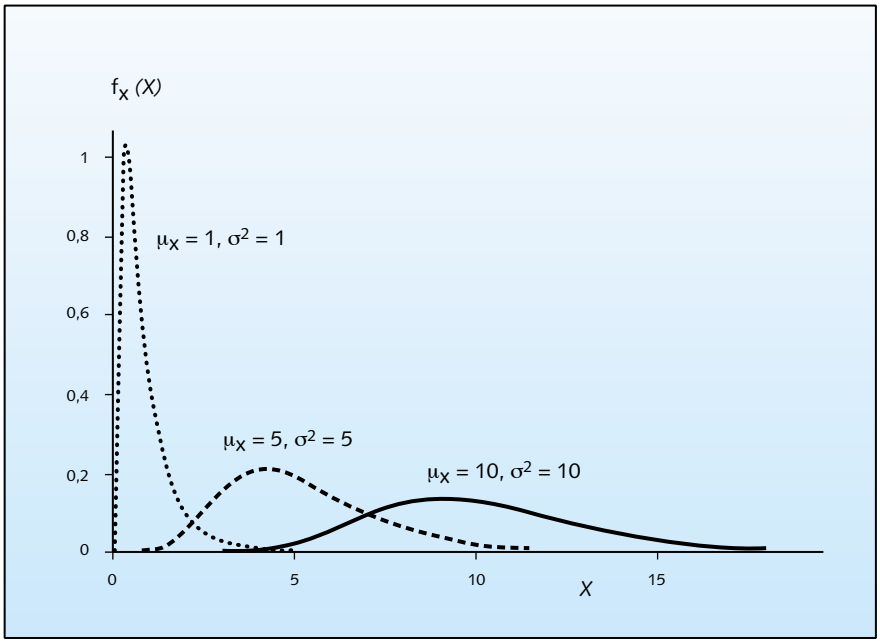
$$\mu_Y = \ln\left(\mu_X - \frac{1}{2}\sigma_Y^2\right) \quad \text{(B17)}$$

In figuur B4 zijn drie lognormale verdelingen weergegeven met verschillende μ_X en σ_X.
Net als bij de normale verdeling is de analytische formulering van de lognormale kansverdelingsfunctie niet bekend. De waarde van de lognormale kansverdelingsfunctie kan worden bepaald door gebruik te maken van tabel B1, nadat *Y*, μ_Y en σ_Y zijn berekend als functie van *X*, μ_X en σ_X:

$$F_X(X) = \Phi_N\left(\frac{\ln(X) - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) \quad \text{(B18)}$$

De lognormale verdeling wordt vaak gebruikt voor variabelen die op fysische gronden geen negatieve waarde kunnen aannemen.
Belangrijk is verder de eigenschap van het product van een groot aantal stochastische variabelen:
„Wanneer een groot aantal onafhankelijke stochastische variabelen, waarvan geen enkele domineert, met elkaar worden vermenigvuldigd, resulteert dit in een stochastische variabele die lognormaal verdeeld is".

Cur frame Page 213 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur B4. *Lognormale verdelingen met μ_x en σ_x.*

B 4 GAMMA-VERDELING

Een andere veel toegepaste verdeling voor stochastische variabelen, die op grond van fysische redenen alleen positieve waarden kunnen aannemen, is de Gamma-verdeling. Deze verdeling wordt gedefinieerd door:

$$f_X(X) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} X^{\alpha-1} e^{\frac{-X}{\beta}} \qquad X \geq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \tag{B19}$$

waarin:

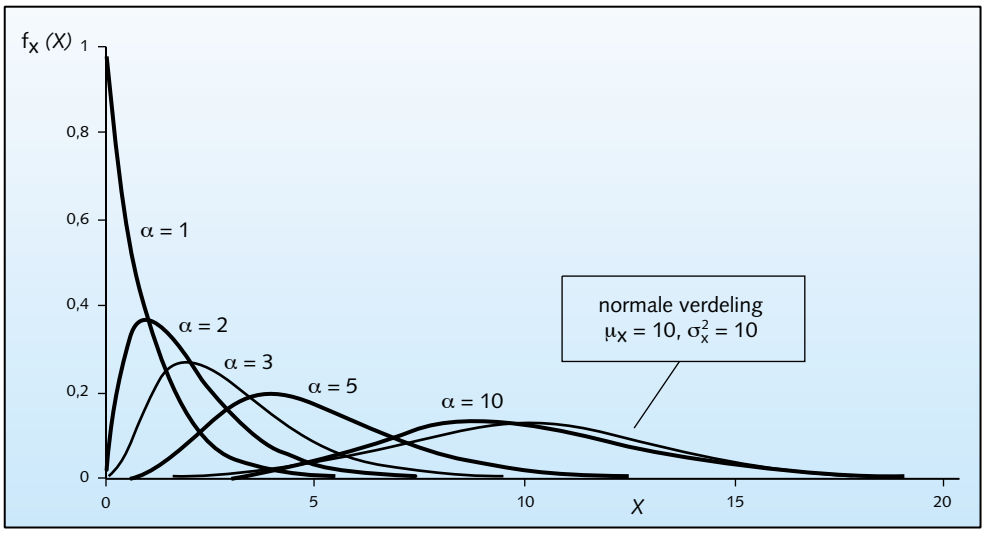
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \tag{B20}$$

Het gemiddelde en de standaardafwijking van de Gamma-verdeling worden bepaald door α en β:

$$\begin{aligned} \mu_X &= \alpha\beta \\ \sigma_X^2 &= \alpha\beta^2 \end{aligned} \tag{B21}$$

Zonder bewijs wordt gegeven dat de som van een aantal stochastisch onafhankelijke Gamma verdeelde variabelen met dezelfde parameter β wederom Gamma verdeeld is. In figuur B5 is een aantal verdelingen getekend met $\beta = 1$ en variërende α. De verdeling met $\alpha = 10$ en $\beta = 1$ komt overeen met de verdeling van de som van 10 variabelen met $\beta = 1$ en $\alpha = 1$. Ter illustratie van de centrale limietstelling is tevens de normale verdeling met gelijke verwachtingswaarde en standaardafwijking weergegeven als streepjeslijn. Opvallend is dat de verdeling van de som van scheef verdeelde variabelen minder snel naar de normale verdeling nadert dan die van symmetrisch verdeelde variabelen (vergelijk fig. B5 met fig. 2.8).

Cur frame Page 214 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur B5. *Gamma-verdelingen met verschillende μ_x en σ_x.*

Enkele combinaties van α en β komen in de statistiek zo vaak voor dat de desbetreffende verdelingen een eigen naam hebben. De combinatie $\alpha = n/2$ en $\beta = 2$, waarin n een positief geheel getal is, geeft de chi-kwadraat-verdeling met n vrijheidsgraden:

$$f_X(X) = \chi^2(n) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}} X^{\frac{n-2}{2}} e^{\frac{-X}{2}} \qquad X \geq 0 \tag{B22}$$

De combinatie $\alpha = n$ en $\beta = 1/\lambda$, waarin ook nu n weer een positief geheel getal is, geeft de Erlang-verdeling met de parameters n en λ:

$$f_X(X) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} X^{n-1} e^{-\lambda X} \qquad X \geq 0 \tag{B23}$$

B5 T-VERDELING

De t-verdeling wordt gebruikt voor het toetsen van de nulhypothese dat de parameter μ van de normale verdeling gelijk is aan een vooraf gegeven waarde μ_0.
Als geldt dat $X_1, X_2, \ldots, X_n$ realisaties zijn van een trekking uit een normale verdeling met parameters μ en σ en als geldt dat $\mu = \mu_0$, dan wordt de dichtheid gegeven door:

$$f_X(X) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)\sqrt{\pi(n-1)}} \left(1 + \frac{X^2}{n-1}\right)^{-\frac{1}{2}n} \tag{B24}$$

De kansverdeling met de dichtheid uit vergelijking (B24) heet de (centrale) t-verdeling met n – 1 vrijheidsgraden.
De dichtheid van $f_X(X)$ lijkt op de standaard normale dichtheid, maar heeft dikkere staarten. Voor $X \to \infty$ daalt $f_X(X)$ langzamer naar 0 dan de standaard normale dichtheid.

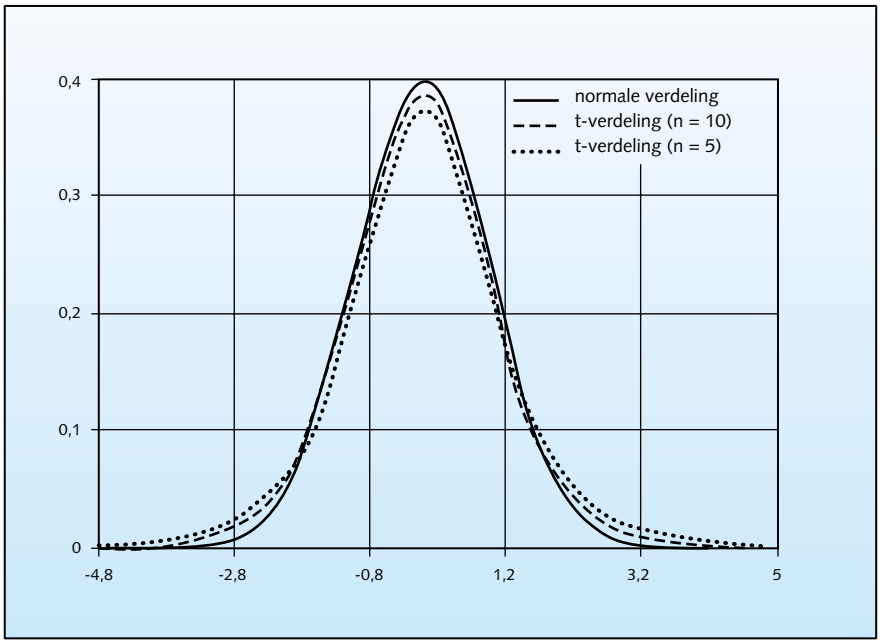
Cur frame Page 215 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

In figuur B6 is de t-verdeling weergegeven voor respectievelijk vier en negen vrijheidsgraden. Uit deze figuur blijkt duidelijk dat naarmate het aantal vrijheidsgraden toeneemt f_x meer op de standaard normale dichtheid lijkt. In tabel B2 zijn voor verschillende overschrijdingskansen en vrijheidsgraden de waarden van de t-verdeling opgenomen.

Tabel B2 *Waarden van de t-verdeling voor verschillende overschrijdingskansen en vrijheidsgraden.*

aantal vrijheidsgraden	overschrijdingskansen t-verdeling				
	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Cur frame Page 216 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur B6. *Kansdichtheid van t-verdeling en standaard normale verdeling.*

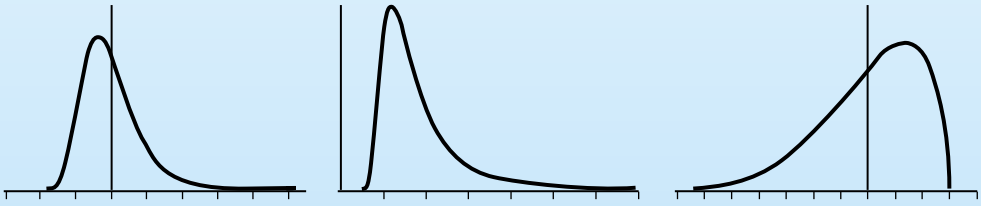
B6 ASYMPTOTISCHE EXTREME WAARDE VERDELINGEN

Voor grote waarden van n naderen de extreme waarde verdelingen van de stochastische variabele naar een beperkt aantal mogelijke typen verdelingen. Deze verdelingen staan bekend als de asymptotische extreme waarde verdelingen en zijn onderverdeeld in drie hoofdtypen. Opgemerkt wordt dat de convergentie naar de asymptotische extreme waarde verdelingen voor toenemende n zeer langzaam is.

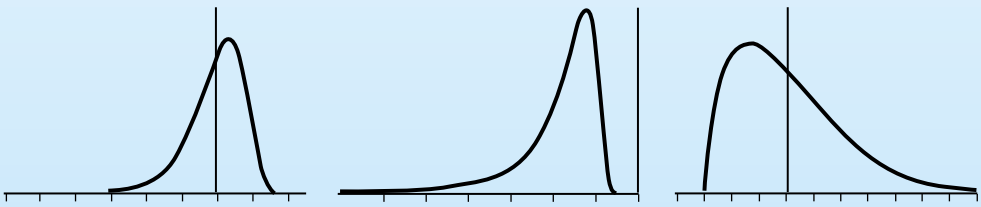
Cur frame Page 217 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Tabel B3 *Asymptotische extreme waarde verdelingen.*

maxima	type I (Gumbel)	type II (Fréchet)	type III
1. $F_Y(Y)$	$\exp(-\exp(-\alpha(Y-u)))$	$\exp\left(-\left(\frac{u}{Y}\right)^k\right)$	$\exp\left(-\left(\frac{Y-\varepsilon}{u-\varepsilon}\right)^k\right)$
2. $f_Y(Y)$	$\alpha\exp(-\alpha(Y-u)-\exp(-\alpha(Y-u)))$	$\left(\frac{k}{u}\right)\left(\frac{u}{Y}\right)^{k+1}\exp\left(-\left(\frac{u}{Y}\right)^k\right)$	$\frac{k}{u-\varepsilon}\left(\frac{Y-\varepsilon}{u-\varepsilon}\right)^{k-1}\exp\left(-\left(\frac{Y-\varepsilon}{u-\varepsilon}\right)^k\right)$
3. range	$-\infty < Y, u < \infty ; \alpha > 0$	$Y, u, k > 0$	$\varepsilon \geq u, Y; k > 0$
4. μ_Y	$u + \frac{0{,}577}{\alpha}$	$u\Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right)\ (k>1)$	$\varepsilon + (-\varepsilon)\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)$
5. σ_Y	$\frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$	$u\left(\Gamma\left(1-\frac{2}{k}\right)-\Gamma^2\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)^{1/2}\ (k>2)$	$(u-\varepsilon)\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)-\Gamma^2\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)^{1/2}$
6. $X = \max Y_i$, $i = \ldots n$	$\alpha_X = \alpha_Y,\ u_X = u_Y + \frac{1n(n)}{\alpha}$	$k_X = k_Y;\ u_X = u_Y n^{1/k_Y}$	



minima	type I	type II	type III (Weibull)
1. $F_Y(Y)$	$\exp(-\exp(-\alpha(Y-u)))$	$1-\exp\left(-\left(\frac{u}{Y}\right)^k\right)$	$1-\exp\left(-\left(\frac{Y-\varepsilon}{u-\varepsilon}\right)^k\right)$
2. $f_Y(Y)$	$\alpha\exp(-\alpha(Y-u)-\exp(-\alpha(Y-u)))$	$-\left(\frac{k}{u}\right)\left(\frac{u}{Y}\right)^{k+1}\exp\left(-\left(\frac{u}{Y}\right)^k\right)$	$-\frac{k}{u-\varepsilon}\left(\frac{Y-\varepsilon}{u-\varepsilon}\right)^{k-1}\exp\left(-\left(\frac{Y-\varepsilon}{u-\varepsilon}\right)^k\right)$
3. range	$-\infty < Y, u < \infty ; \alpha > 0$	$Y, u, k > 0$	$\varepsilon \geq u, Y; k > 0$
4. μ_Y	$u + \frac{0{,}577}{\alpha}$	$u\Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right)\ (k>1)$	$\varepsilon + (-\varepsilon)\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)$
5. σ_Y	$\frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$	$u\left(\Gamma\left(1-\frac{2}{k}\right)-\Gamma^2\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)^{1/2}\ (k>2)$	$(u-\varepsilon)\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)-\Gamma^2\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)^{1/2}$
6. $X = \max Y_i$, $i = \ldots n$	$\alpha_X = \alpha_Y,\ u_X = u_Y + \frac{1n(n)}{\alpha}$	$k_X = k_Y;\ u_X = u_Y n^{1/k_Y}$	



Cur frame Page 218 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Bijlage C: Methoden voor het schatten van parameters en verdelingen

C1 METHODE DER MOMENTEN

Als de parameters van de verdeling samenvallen met de momenten (gemiddelde, variantie enz.) kunnen deze parameters rechtstreeks worden bepaald door de momenten van het statistisch materiaal uit te rekenen.
Als de parameters niet samenvallen met de momenten wordt een variant toegepast: de momenten van de waarnemingen worden bepaald en deze worden omgerekend naar de gewenste parameters.
In het algemeen moet daarmee zeer voorzichtig worden omgegaan. Deze schatters zijn vaak onzuiver, niet efficiënt en soms zelfs niet betrouwbaar. Neem bijvoorbeeld de extreme waarde verdeling type II voor maxima. Voor $k < 1$ heeft deze verdeling geen variantie en voor $k < 2$ geen gemiddelde. De steekproef heeft uiteraard wel altijd een eindig gemiddelde en een standaardafwijking. Men komt zodoende bij voorbaat op verkeerde waarden terecht.

C2 METHODE VAN DE MAXIMUM LIKELIHOOD

De likelihood function geeft de relatieve waarschijnlijkheid weer van het verkregen waarnemingsmateriaal als functie van de parameter p:

$$\begin{aligned} L(p|\vec{X}) &= f_X(X_1|p)f_X(X_2|p)\ldots f_X(X_n|p) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f_X(X_i|p) \end{aligned} \qquad \text{(C1)}$$

De methode van de maximum likelihood houdt in dat als schatter van p de waarde wordt gekozen met de grootste waarde van de likelihood function.
In het geval er verschillende parameters van de verdeling moeten worden geschat, kan dit ook met de methode van de maximum likelihood gebeuren. De likelihood function is in zo'n geval meer-dimensionaal. Voor het schatten van 2 parameters is dit bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} L(p_1 \cap p_2|\vec{X}) &= f_X(X_1|p_1 \cap p_2)f_X(X_2|p_1 \cap p_2)\ldots f_X(X_n|p_1 \cap p_2) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f_X(X_i|p_1 \cap p_2) \end{aligned} \qquad \text{(C1)}$$

Het vinden van het maximum is in het geval van het schatten van verschillende parameters minder eenvoudig. Hier staan ons echter diverse numerieke methoden ten dienste. Hiervoor wordt verwezen naar de handboeken voor de numerieke wiskunde.
Met de methode van de maximum likelihood is het mogelijk om een analytische uitdrukking te verkrijgen voor de schatters. De kracht van de methode is echter de betrekkelijk eenvoudige numerieke uitwerking en daarmee de geschiktheid voor automatisering. De maximum likelihood schatters zijn overigens niet altijd zuivere schatters.

Cur frame Page 220 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

C3 PARAMETERSCHATTING MET DE METHODE DER KLEINSTE KWADRATEN

De methode der kleinste kwadraten is een algemeen toepasbare methode voor het passen van functies op waarnemingen. Bij deze methode wordt verondersteld dat bij de beste passing de som van de kwadraten van de verschillen tussen de berekende en de waargenomen waarden minimaal is.
Als van statistisch materiaal het kansverdelingstype bekend is, kan de som der kwadraten worden beschreven als functie van de parameters van de verdeling:

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(P_X(X_i) - F_X(X_i) \right)^2 \qquad \text{(C3)}$$

waarin:

$F_X(X_i)$ is de berekende onderschrijdingskans;
$P_X(X_i)$ is de fractie van het waargenomen materiaal dat kleiner is dan X_i;
n is het aantal waarnemingen.

$P_X(X_i)$ wordt doorgaans bepaald door alle waarnemingen op volgorde te zetten, waarbij de laagste waarneming het rangnummer 1 krijgt en de hoogste waarneming het rangnummer n. Vervolgens geldt dan:

$$P_X(X_i) = \frac{i}{n+1} \qquad \text{(C4)}$$

De extreme waarden van de functie $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ kunnen worden gevonden door partiële differentiatie naar de parameters $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Vervolgens moeten de parameters zodanig worden gekozen dat geldt:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \qquad \text{(C5)}$$

Bij het schatten van de parameters van een verdeling met twee parameters wordt dikwijls een transformatie van de verdelingsfunctie en de waarnemingen gedaan, zodat de te passen functie lineair is.

C4 BETROUWBAARHEID VAN DE GESCHATTE PARAMETERS

Om inzicht te krijgen in de nauwkeurigheid, waarmee een parameter kan worden geschat, kunnen met de klassieke frequentistische statistiek betrouwbaarheidsintervallen worden gedefinieerd. Het een en ander kan het beste worden gedemonstreerd aan de hand van een voorbeeld.
Stel dat van een stochastische variabele bekend is dat deze normaal verdeeld is met een bekende standaardafwijking σ_X. Het gemiddelde μ_X van de verdeling wordt benaderd met als schatter het steekproefgemiddelde m. Dit steekproefgemiddelde is een normaal verdeelde stochastische variabele (centrale limietstelling) met

Cur frame Page 221 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

gemiddelde μ_X en standaardafwijking $\sigma_X/(\sqrt{n})$. Met behulp van de standaard normale verdeling kan de kans worden gedefinieerd dat het steekproefgemiddelde binnen bepaalde grenzen ligt:

$$P\left(\mu_X - u\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} < m < \mu_X + u\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(u) - \left(1 - \Phi(u)\right) \tag{C6}$$

Voor het geval u = 1,64 geldt:

$$P\left(\mu_X - 1{,}64\,\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} < m < \mu_X + 1{,}64\,\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}90 \tag{C7}$$

Volgens de statistiek mag hieruit overigens niet worden geconcludeerd dat het gemiddelde μ_X ligt tussen $m - u\sigma_X/\sqrt{n}$ en $m + u\sigma_X/\sqrt{n}$. Het gemiddelde is immers een deterministische parameter en kan dus niet als stochast worden behandeld.
Om toch betrouwbaarheidsgrenzen te kunnen aangeven, volgt de klassieke statistiek de redenering met het verwerpen van hypothesen.
Ten aanzien van het onbekende gemiddelde kan een aantal hypothesen worden gemaakt, bijvoorbeeld:

hypothese H_1: $$\mu_X < m - 1{,}64\,\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \tag{C8}$$

hypothese H_2: $$m - 1{,}64\,\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \le \mu_X < m + 1{,}64\,\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \tag{C9}$$

hypothese H_3: $$m + 1{,}64\,\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \le \mu_X \tag{C10}$$

De kans dat hypothese H_1 waar is en tegelijkertijd het steekproefgemiddelde gelijk is aan m, is slechts 5 %. Hetzelfde geldt voor hypothese H_3. Op grond hiervan worden de hypothesen H_1 en H_3 verworpen. Wat overblijft is het betrouwbaarheidsinterval.
In het geval de standaardafwijking van de verdeling van X niet bekend is, moet deze ook worden benaderd met een schatter. Het beoordelen van de hypothesen moet dan niet gebeuren met de standaard normale verdeling maar met een t-verdeling (zie bijlage B).

C5 BAYESIAANSE PARAMETERSCHATTING

De Bayesiaanse parameterschatting is een mix van de subjectieve en de frequentistische parameterschatting. Begonnen wordt met het vaststellen van a priori kansen voor het juist zijn van een aantal hypothesen die de kennis weergeven op het moment dat er nog geen gegevens beschikbaar zijn. Deze kansen zijn subjectief en vormen daarmee de zwakke kant van de Bayesiaanse analyse.

Cur frame Page 222 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Deze a priori verdeling wordt door middel van een standaard procedure gecombineerd met de objectieve statistische gegevens om te komen tot de a posteriori kansverdeling. Centraal in de analyse staat het theorema van Bayes, hier te schrijven als:

$$P(H_i|\vec{X}) = \frac{P(\vec{X}|H_i)P(H_i)}{P(\vec{X})} \qquad \text{(C11)}$$

waarin:

$P(H_i|\vec{X})$ is de kans dat hypothese H_i waar is, gegeven de waarneming ;
$P(\vec{X}|H_i)$ is de kans op het waarnemen van de statistische gegevens onder de veronderstelling dat de hypothese H_i waar is; in feite is dit gelijk aan de likelihood function $L(H_i|\vec{X})$;
$P(H_i)$ is de a priori kans op het juist zijn van de hypothese H_i;
$P(\vec{X})$ is de totale waarschijnlijkheid van de waarnemingen $\vec{X} = \sum_{i=1}^{n} P(\vec{X}|H_i)P(H_i)$

Het voorgaande is te vertalen naar continue stochastische variabelen door uit te gaan van kansdichtheidsfuncties. Stel bijvoorbeeld dat is gegeven dat een variabele X een kansdichtheidsfunctie $f_X(X)$ heeft met een parameter P, die onbekend is. In eerste instantie wordt P beschreven met een a priori kansdichtheidsfunctie $f_P(P)$.
Na het verkrijgen van n waarnemingen van X kan de a posteriori kansdichtheidsfunctie van P worden bepaald:

$$\begin{aligned} f_P(P|X_1, X_2, \ldots, X_n) &= \frac{f_X(X_1|P)f_X(X_2|P)\ldots f_X(X_n|P)f_p(P)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X_1|P)f_X(X_2|P)\ldots f_X(X_n|P)f_P(P)dP} \\ &= \frac{L\left(P|(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right)f_P(P)}{\int_{-\infty}^{\infty} L(P)|(X_1, X_2, \ldots, X_n)f_P(P)dP} \end{aligned} \qquad \text{(C12)}$$

Evenals de methode van de maximum likelihood leent deze methode zich uitstekend voor numerieke uitwerking. Met betrekkelijk eenvoudige numerieke procedures kunnen met de a posteriori kansdichtheidsfuncties betrouwbaarheidsintervallen voor P worden gedefinieerd.

C6 CHI-KWADRAAT-TEST

De χ^2-test vergelijkt het histogram van het statistische materiaal met de gekozen kansdichtheidsfunctie. Bij deze methode wordt een toetsingsgrootheid y berekend volgens de formule:

$$y = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(N_i - n\int_{a_i}^{b_i} f_X(X)dX\right)^2}{n\int_{a_i}^{b_i} f_X(X)dX} \qquad \text{(C13)}$$

Cur frame Page 223 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

waarin:

- i is het intervalnummer van het histogram;
- a_i is de ondergrens van interval i;
- b_i is de bovengrens van interval i;
- k is het aantal intervallen;
- N_i is het aantal waarnemingen in interval i;
- n is het totale aantal waarnemingen.

Bewezen is dat y voor grote n een χ^2-verdeling heeft met k-r-1 graden van vrijheid. Hierin is r het aantal parameters van $f_X(X)$ dat op basis van het statistische materiaal is geschat.
In tabel C1 zijn waarden van χ^2_υ gegeven voor verschillende overschrijdingskansen P en vrijheidsgraden υ. Als y groter is dan χ^2_{k-r-1} bij een gekozen overschrijdingskans P, moet de keuze van $f_X(X)$ worden verworpen.
Een nadeel van de χ^2-test is dat het resultaat afhankelijk is van de gekozen histogramindeling.

Tabel C1 *Waarden van χ^2 bij gegeven overschrijdingskansen* P *en vrijheidsgraad υ.*

	P	vrijheidsgraad								
	υ = k – r – 1	0,99	0,95	0,90	0,75	0,50	0,25	0,10	0,05	0,01
	1	0,0	0,0	0,0	0,1	0,4	1,3	2,7	3,8	6,6
	2	0,0	0,1	0,2	0,6	1,4	2,8	4,6	6,0	9,2
	3	0,2	0,4	0,6	1,2	2,4	4,1	6,3	7,8	11,3
	4	0,3	0,7	1,1	1,9	3,4	5,4	7,8	9,5	13,3
	5	0,6	1,2	1,6	2,6	4,4	6,6	9,3	11,1	15,1
	10	2,6	3,9	4,9	6,7	9,3	12,5	16,0	18,3	23,2
	20	8,3	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	37,6
	30	15,0	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	50,9

C7 KOLMOGOROV-SMIRNOV-TEST

De Kolmogorov-Smirnov-test vergelijkt de gekozen verdelingsfunctie met het statistische materiaal. Bij deze methode wordt wederom een toetsingsgrootheid y berekend. Ditmaal met de formule:

$$y = \max\left(\left|\frac{i}{n} - F_x(X_i)\right|\right) \qquad \text{(C14)}$$

waarin:

- i is het nummer van de waarneming, nadat alle waarnemingen zijn gerangschikt van klein naar groot;
- n is het aantal waarnemingen;
- X_i is de i^{de} waarneming na rangschikking.

Cur frame Page 224 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

De aangenomen verdelingsfunctie moet worden verworpen als:

$$y > \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \tag{C15}$$

waarin:

α is de coëfficiënt, afhankelijk van de betrouwbaarheidsdrempel, te weten:

P	α
0,10	1,23
0,05	1,36
0,01	1,63

Bij het voorgaande verwerpingscriterium is ervan uitgegaan dat de parameters van de verdeling niet zijn geschat uit hetzelfde statistische materiaal als waarmee de verdeling wordt vergeleken. Is dat echter wel het geval, dan lijkt het aannemelijk om het verwerpingscriterium aan te passen naar:

$$y > \frac{\alpha}{\sqrt{n - r}} \tag{C16}$$

C8 BAYESIAANSE PROCEDURE VOOR DE KEUZE VAN HET VERDELINGSTYPE

Procedureel is er geen onderscheid in de Bayesiaanse parameterschatting en de Bayesiaanse procedure voor de keuze van het verdelingstype.
De procedure is als volgt:

a. Stel een aantal hypothesen op, bijvoorbeeld:
   H_1: de variabele X is normaal verdeeld;
   H_2: de variabele X is lognormaal verdeeld;
   H_3: de variabele X heeft een extreme waarde verdeling type I.
b. Kies de a priori kansen $P(H_i)$.
c. Bepaal de likelihood functies:

$$P(\vec{X}|H_i) = \prod_{j=1}^{n} f_X(X_i|H_i) \tag{C18}$$

Cur frame Page 225 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

d. Bepaal de a posteriori kansen:

$$P(H_i|\vec{X}) = \frac{P(\vec{X}|H_i)P(H_i)}{\sum_{i=1}^{3}\left(P(\vec{X}|H_i)P(H_i)\right)} \qquad \text{(C19)}$$

Feitelijk moet de Bayesiaanse analyse voor de verdelingen gelijktijdig worden uitgevoerd met de analyse voor de parameters. In verband met de grote hoeveelheid rekenwerk wordt dat meestal niet gedaan en worden eerst per verdelingstype de parameters bepaald.
Een belangrijk verschil met de parameterschattingen is dat men bij de verdelingsschattingen niet uitputtend kan zijn. Bij de bepaling van een parameter kunnen bijvoorbeeld een oneindig aantal hypothesen in beschouwing worden genomen door een a priori kansdichtheidsfunctie aan te nemen. Bij de keuze van het verdelingstype gaat het echter om een discrete variabele die bovendien eindig is. Het is immers onmogelijk om alle verdelingstypen in beschouwing te nemen.

Cur frame Page 226 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Cur frame Page 227 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Bijlage D: Databases

Databases kunnen worden gebruikt om inzicht te verkrijgen in faalmechanismen en de grootte van de faalkans, het faaltempo of de niet-beschikbaarheid van componenten. Verder kan vaak ook inzicht worden verkregen in sterkte en belasting.
Databases komen voor in (hand)boeken, in computerbestanden en sinds kort ook op Internet. De (hand)-boeken kunnen al dan niet tegen betaling worden aangeschaft bij de producent of worden ingezien bij een bibliotheek. Voor databases op het Internet geldt dat het vaak beschrijvingen van de inhoud van de databases zijn. Met zogenoemde „search-engines" kan het Internet worden afgezocht aan de hand van door de gebruiker op te geven zoektermen.
Enkele andere opmerkingen betreffende databases op Internet zijn:

> er is veel informatie te vinden, er is alleen te veel informatie aanwezig om snel en handig te kunnen zoeken;
> veel informatie is een aankondiging van een database, zonder dat direct duidelijk wordt wat de inhoud hiervan is;
> de meest beschikbare informatie heeft betrekking op Amerikaanse omstandigheden en feiten. Europa loopt op dit gebied achter.

Voorbeelden van databases zijn:

> informatie over klimatologische omstandigheden, windsnelheden, temperaturen enzovoorts; beschikbaar bij het KNMI, de Bilt;
> waterstandgegevens van de Noordzee of van Nederlandse rivieren; beschikbaar bij onder meer het Rijksinstituut voor Integraal Zoetwaterbeheer en Afvalwaterbehandeling (RIZA), Lelystad en het Rijksinstituut voor Kust en Zee (RIKZ) te Den Haag;
> 10-jarig overzicht van rivierstanden; uitgegeven door RIKZ te Den Haag;
> sterktegegevens (faaltempo) van elektrische componenten; verkrijgbaar bij KEMA, Arnhem;
> design of reliability for aerospace applications; TU Delft, rapport 93-110.

In het handboek Methods for determining and processing probabilities, Ministerie van VROM 1985, worden de volgende databases genoemd:

> Military Standardization Handbook, Defence Documentation Center, faaltempo van elektrische componenten;
> IEEE Guide, Institute of Electrical and Electronical Engineers, faaltempo van elektrische componenten;
> Syrel-databank, SRS-UKAEA England, volledig en partieel bezwijken van elektrische, elektronische en mechanische componenten;
> Centre National d'Etudes de TéléCommunication (CNET), volledig en partieel bezwijken van elektronische componenten;
> IEN „Galilea Ferraris", falen van elektronische componenten;
> Military Electronics Laboraty FACK, Zweden, faaltempo en belastingen van elektrische en mechanische componenten;
> ESEA Electronic Division, falen van elektronische en elektro-mechanische componenten;

Cur frame Page 228 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

- Hewlett Packard GmbH, falen van elektronische componenten;
- ITT-Europe, falen van elektronische componenten;
- WASH 1400, Reactor safety study, faaltempo en niet-beschikbaarheid van elektrische en mechanische componenten;
- Det Norske Veritas, falen van mechanische componenten;
- Ausfallratensammlung HP Balfanz, falen van elektrische en mechanische componenten;
- Green and Bourne: Reliability technology, falen van elektrische, elektronische en mechanische componenten.

Andere database bestanden zijn:

- Reliability data of components in Nordic nuclear power plants, T-book 3rd Edition;
- Reliability data book, Nuclear Safety Board of the Swedish Utilities;
- OREDA, Offshore reliability data 1992;
- Guidelines for process equipment reliability data, Center for Chemical Process Safety, New York VS, 1989;
- Eireda, The European industry reliability data bank handbook, Volume 1, Parijs, 1991;
- Nonelectric parts reliability data, Reliability Analysis Center 1986;
- Lloyds list London, ongevallen met schepen;
- Poten and Partners Inc., ongevallen met tankers groter dan 5000 m;
- Det Norske Veritas, ongevallen met Noorse schepen groter dan 25 ton;
- Dienst Verkeerskunde Rijkswaterstaat, scheepsongelukken in Nederlandse waterwegen;
- Dienst Verkeersongevallenregistratie, verkeersongevallen met als gevolg doden, gewonden of materiële schade boven *ƒ* 1000;
- National Transportation Safety Board (NTSB), ongevallen met betrekking tot pijpleidingen, vliegtuigen, schepen en vrachtwagens.

Enkele voorbeelden van informatie op Internet zijn:

- World Wave Atlas, http://oblea.oceanor.no/home.html, Informatie over gemiddelde golfhoogten, windsnelheden en deining;
- Offshore Blowout Database, http://www.sintef.no/sipaa/prosjekt/blowout.html, Beschrijving van 382 blowouts bij de offshore industrie;
- OREDA, Offshore reliability DA, http://ww.sinef.no/sipaa/prosjekt/oreda.html, Database met onderhoudsgegevens en gegevens over technische fouten en ongelukken;
- Southern Calafornia Swell Model, http://cdip.ucsd.edu/models/wave.model.html, Gegevens over de actuele golfhoogten langs de Californische kust;
- Dam Safety Home Page, http://wtrwww.env.gov.bc.ca/dams/dam.html, Diverse informatie betreffende veiligheid van dammen; onder meer kwalitatieve beschrijving van risico-analyse van kleine dammen.

Opmerking:
De genoemde URL-adressen kunnen worden gewijzigd. Als dit is gebeurd, kan met behulp van een search-engine het juiste adres worden achterhaald.

Cur frame Page 229 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Bijlage E: Sterkte- en belastingparameters bij de beoordeling van de veiligheid van bouwconstructies

Voor het uitvoeren van een risico-analyse is het nodig te beschikken over statistische gegevens van belastingen en sterkte. Deze bijlage geeft een overzicht van statistische eigenschappen van parameters, waarmee in het project „Veiligheid van bouwconstructies" [E1] is gerekend.
Tabel E1 geeft een aantal belastingparameters en tabel E2 enkele sterkteparameters.
Ten slotte geeft tabel E3 waarden voor de modelfactoren. Een modelfactor is de verhouding tussen de werkelijke belasting of draagkracht en die volgens het rekenmodel als alle meegenomen stochasten als deterministische gegevens bekend zouden zijn. De modelfactoren brengen alle systematische en toevallige fouten in rekening die het gevolg zijn van schematiseringen, vereenvoudigingen en onnauwkeurigheden. Voorbeelden hiervan zijn:

- onregelmatigheden in vloer, winden sneeuwbelasting, terwijl in de berekening een gelijkmatig verdeelde belasting wordt aangenomen;
- verschil tussen sneeuwbelasting op de grond en op het dak;
- aerodynamische coëfficiënten bij wind;
- verschil tussen theoretische en fysische oplegcondities;
- afwijkingen van de hypothese van Bernoulli;
- afwijkingen van theoretische σ-ε-diagrammen.

In beginsel moeten ook de „gewone" rekenfouten in de modelfactor worden opgenomen.
Het zal duidelijk zijn dat harde gegevens hier vrijwel geheel ontbreken. Toch heeft iedere ingenieur wel een oordeel over de kwaliteit van zijn rekenmodel, bijvoorbeeld via vergelijking met rekenkundige resultaten van een beter of ander model, laboratoriumproeven of praktijkgegevens. Het aangeven van die kwaliteit door middel van een gemiddelde en een spreiding heeft het voordeel dat het belang kan worden vergeleken met andere bronnen van spreiding en dat op consistente wijze voor minder betrouwbare modellen grote veiligheidscoëfficiënten kunnen worden afgeleid.

Verklaring van de in de tabellen gebruikte symbolen:

X_{nom}	= nominale waarde
σ	= standaardafwijking
V	= variatiecoëfficiënt = σ/μ
A_o	= standaardvloeroppervlak = 4 m^2
D	= deterministisch
N	= normale verdeling
LN	= lognormale verdeling
Ex I	= extreme waarde verdeling type I voor maxima
W	= Weibull-verdeling
G	= Gamma-verdeling
TN	= truncated normal (afgekapt bij het gemiddelde)

Cur frame Page 230 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Tabel E1 *Belastingen.*

	parameter	type	gemiddelde	spreiding
	eigen gewicht	N	1,05 X_{nom}	V = 0,07
	scheidingswanden	LN	0,30 kN/m^2	V = 0,40
	vloerbelasting (inventaris/personen):			
	kantoor: – momentaan	G	0,5 kN/m^2	V = 0,4 + A_o/A
	– maximaal (A ≤ 100 m^2)	Ex I	1,5 kN/m^2	V = 0,4
	woonhuis: – momentaan	G	0,3 kN/m^2	V = 0,4 + A_o/A
	– maximaal (A ≤ 100 m^2)	Ex I	1,0 kN/m^2	V = 0,4
	hal: – momentaan	G	0,8 kN/m^2	V = 0,4 + A_o/A
	– maximaal	Ex I	2,5 kN/m^2	V = 0,4
	schouwburg: – momentaan	G	1,0 kN/m^2	V = 0,4 + A_o/A
	– maximaal	Ex I	2,5 kN/m^2	V = 0,4
	pakhuis: – momentaan	G	1,0 kN/m^2	V = 0,4 + A_o/A
	– maximaal	Ex I	2,5 kN/m^2	V = 0,4
	windbelasting (10 m hoogte):			
	momentaan	W	0,10 kN/m^2	V = 1,00
	maximaal	Ex I	1,00 kN/m^2	V = 0,30
	sneeuwbelasting:			
	momentaan	LN	0,2 kN/m^2	V = 1,00
	maximaal	Ex I	0,7 kN/m^2	V = 0,30
	excentriciteiten:			
	staal/hout:			
	– geschoord (e)	TN	0,0010 l	V = 0,8
	– ongeschoord (e)	TN	0,0015 l	V = 0,8
	beton:			
	– geschoord (e)	TN	0,0020 l	V = 0,8
	– ongeschoord (e)	TN	0,0060 l	V = 0,8

Cur frame Page 231 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Tabel E2 *Sterkteparameters.*

	parameter	type	gemiddelde	spreiding
	staal:			
	vloeispanning staal Fe 360	LN	280 MPa	V = 0,08
	breukspanning staal Fe 360	LN	430 MPa	V = 0,08
	elasticiteitsmodulus staal	L	210 GPa	V = 0,04
	beton:			
	breukspanning B 22,5 (korteduur)	LN	22 MPa	V = 0,15
	treksterkte B 22,5 (korteduur)	LN	2,5 MPa	V = 0,20
	elasticiteitsmodulus B 22,5 (korteduur)	LN	28 MPa	V = 0,10
	langeduurfactor druk	LN	0,9	V = 0,10
	kruipfactor φ B 22,5	LN	3,0	V = 0,20
	vloeispanning betonstaal	LN	460 MPa	V = 0,10
	standaard bouwhout:			
	– druk (u = 16 %)	W	28	V = 0,15
	– trek	W	26	V = 0,30
	– buiging	W	36	V = 0,25
	– elasticiteitsmodulus	W	12000	V = 0,20
	constructiehout:			
	– druk	W	32	V = 0,15
	– trek	W	32	V = 0,30
	– buiging	W	45	V = 0,25
	– elasticiteitsmodulus	W	13000	V = 0,20
	gelamineerd hout:			
	– druk	W	32	V = 0,15
	– trek	W	32	V = 0,20
	– buiging	W	45	V = 0,15
	– elasticiteitsmodulus	W	13000	V = 0,15
	langeduurfactor sterkte (t = ∞)	LN	0,53	V = 0,10
	kruipfactor φ	LN	1,0	V = 0,30
	verbinding (ringdeuvel)	W	circa 3x toel.waarde	V = 0,15
	maatafwijkingen:			
	staalprofielen A, W, I	N	X_{nom}	V = 0,04
	houtafmetingen b, h	N	X_{nom}	V = 0,04
	afmeting betonbalk/kolom/plaat	N	X_{nom}	σ = 4 mm
	betondekking bovenwapening	LN	X_{nom} + 5 mm	σ = 10 mm
	betondekking onderwapening	LN	X_{nom}	σ = 7 mm
	betondekking kolommen/wanden	LN	X_{nom} + 5 mm	σ = 7 mm

Cur frame Page 232 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Tabel E3 *Modelfactoren.*

modelfactor	type	gemiddelde	spreiding
belastingen:			
eigen gewicht	LN	1,00	V = 0,05
vloerbelasting	LN	1,00	V = 0,05
wind	LN	1,00	V = 0,20
sneeuw	LN	1,00	V = 0,20
staal:			
ligger (maximale draagkracht)	LN	1,10	V = 0,07
ligger (doorbuiging)	LN	1,10	V = 0,07
pendelkolom	LN	1,30	V = 0,10
kolom	LN	1,10	V = 0,10
lasverbinding	LN	1,20	V = 0,20
boutverbinding:			
– bezwijken flens	LN	1,07	V = 0,11
– boutbreuk/vloei flens	LN	1,05	V = 0,06
– boutbreuk	LN	1,11	V = 0,05
beton:			
ligger (ULS buiging)	LN	1,10	0,10
ligger (ULS dwarskracht)	LN	1,00	0,18
ligger (doorbuiging)	LN	1,10	0,10
ligger (scheurwijdte)	LN	1,00	0,30
pendelkolom	LN	1,30	0,15
kolom	LN	1,10	0,15
verbinding	LN	1,10	0,10
hout:			
ligger (maximale draagkracht)	LN	1,10	0,07
ligger (doorbuiging)	LN	1,10	0,07
pendelkolom	LN	1,30	0,10
kolom	LN	1,10	0,10
verbinding	LN	1,20	0,10

LITERATUUR

E1. SIEMES, A. en A. VROUWENVELDER, Veiligheid van bouwconstructies. TNO-rapport B1-84-36, TNO, Delft, juli 1984.

Bijlage F: Randomgetallen generator

In tabel F1 is een overzicht gegeven van gangbare transformaties van randomgetallen uit een uniforme verdeling naar randomgetallen uit een gegeven andere verdeling.

Tabel F1 *Kansdichtheidsfunctie en transformatie van uniform verdeelde randomvariabele X_u per verdelingstype.*

verdelingstype	kansdichtheidsfunctie	transformatie van uniform verdeelde randomvariabele X_u
normaal	$f_X(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2}$	$X = \mu_X + \sigma_X(-2\ln X_{u,1})^{\frac{1}{2}}\cos(2\pi X_{u,2})$
lognormaal	$F_X(X) = \frac{1}{X\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(X)-\mu_X}{\sigma_Y}\right)^2}$ $y = \ln(x)$	$X = e^{\mu_X + \sigma_X(-2\ln X_{u,1})^{\frac{1}{2}}\cos(2\pi X_{u,2})}$
exponentieel	$f_X(X) = \lambda e^{-\lambda(X-\mu_X)}$	$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(X_u) + \mu_X$
Chi-kwadraat	$f_X(X) = \frac{e^{-\frac{1}{2}X} X^{\frac{\gamma}{2}-1}}{2^{\frac{\gamma}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$	$X = \sum_{i=1}^{\gamma} X_{n_i}$ waarin X_n een trekking is uit de normale verdeling volgens de bovenstaande transformatie
Weibull	$f_X(X) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{X}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{X}{\alpha}\right)^{\beta}}$	$X = -\alpha\left(\ln(1-X_u)\right)^{\frac{1}{\beta}}$

Op grond van de centrale limietstelling is bekend dat de som van een groot aantal uniform verdeelde variabelen normaal verdeeld is. Door middel van een eenvoudige transformatie van de som van n trekkingen uit de uniforme verdeling tussen nul en één wordt een trekking uit de standaard normale verdeling verkregen. Deze transformatie luidt:

$$u = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_u - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \qquad \text{(F1)}$$

Cur frame Page 234 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Een variabele X met een normale verdeling met gemiddelde μ en standaardafwijking σ kan worden uitgedrukt in de standaard normaal verdeelde variabele u met:

$$X = \sigma u + \mu \tag{F2}$$

Op grond van de centrale limietstelling is bekend dat de som van een groot aantal uniform verdeelde variabelen normaal verdeeld is. Door middel van een eenvoudige transformatie van de som van n trekkingen uit de uniforme verdeling tussen nul en één wordt een trekking uit de standaard normale verdeling verkregen. Deze transformatie luidt:

$$u = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_u - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \tag{F1}$$

Een variabele X met een normale verdeling met gemiddelde μ en standaardafwijking σ kan worden uitgedrukt in de standaard normaal verdeelde variabele u met:

$$X = \sigma u + \mu \tag{F2}$$

Derhalve kan met behulp van n trekkingen uit de uniforme verdeling een randomgetal worden gegenereerd uit een normale verdeling met gemiddelde μ en standaardafwijking σ volgens:

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_u - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \sigma + \mu \tag{F3}$$

Deze wijze van genereren van normaal verdeelde variabelen is goed voor het middengebied van de verdeling. Met deze methode worden namelijk geen waarden gegenereerd buiten het interval:

$$\left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right]$$

Een andere zeer efficiënte methode voor het genereren van een standaard normaal verdeeld randomgetal is de methode van Box en Muller. Met behulp van twee trekkingen uit de uniforme verdeling tussen nul en één ($X_{u,1}$ en $X_{u,2}$) kunnen twee standaard normaal verdeelde random getallen (u_1 en u_2) worden gegenereerd:

$$\begin{aligned} u_1 &= (-2 \ln X_{u,1})^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi X_{u,2} \\ u_2 &= (-2 \ln X_{u,1})^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi X_{u,2} \end{aligned} \tag{F4}$$

Bijlage G: Bijdragecoëfficiënten volgens niveau III methode

De bijdragecoëfficiënten α_i volgens de niveau II methoden zijn geformuleerd als:

$$\alpha_i = \frac{-\frac{\partial Z}{\partial X_i}\sigma_{X_i}}{\sigma_Z} = \frac{-a_i\sigma_{X_i}}{\sigma_Z} \qquad \text{(G1)}$$

Volgens de lineaire regressie-analyse geldt voor de verwachtingswaarde van a_i:

$$a_i = \frac{Cov(X_i, Z)}{var(X_i)} = \frac{Cov(X_i, Z)}{\sigma^2_{X_i}} \qquad \text{(G2)}$$

dus:

$$\alpha_i = -\frac{a_i\sigma_{X_i}}{\sigma_Z} = -\frac{Cov(X_i, Z)}{\sigma_{X_i}\sigma_Z} = \rho_i \qquad \text{(G3)}$$

waarin:

ρ_i is de correlatiecoëfficiënt van X_i en Z.

Door in de niveau III procedure de covarianties van de Z-functie(s) en de basisvariabelen X_i, de standaardafwijking van Z en de standaardafwijkingen van de basisvariabelen te bepalen, kunnen de bijdragecoëfficiënten α_i worden bepaald. De a_i-waarden, die zijn bepaald volgens de regressie-analyse, zijn de partiële differentialen rond het gemiddelde van de vector $\vec{X} = (\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, ..., \mu_{x_n})$. De voorgaande benadering van de bijdragecoëfficiënten is derhalve een Mean Value benadering.
Een benadering van de α_i-waarden in een punt, dat meer in de buurt van het ontwerppunt ligt, kan worden verkregen met:

$$\alpha_i = \frac{Cov(1(Z), X_i)}{\sigma_{1(Z)}\sigma_{X_i}} \qquad \text{(G4)}$$

waarin:

$1(Z)$ is de indicatorfunctie:
$1(Z) = 0$, als $Z \geq 0$;
$1(Z) = 1$, als $Z < 0$.

De α_i-waarden kunnen ook worden bepaald met behulp van de schatting van de faalkans en het ontwerppunt. De bijdragecoëfficiënten worden dan berekend met:

$$\alpha_i = \frac{X_i^* - \mu_{X_i}}{\beta\sigma_{X_i}} \qquad \text{(G5)}$$

waarin:

X_i^* is de waarde van X_i in het ontwerppunt;
β is de betrouwbaarheidscoëfficiënt = $\Phi^{-1}(P_f)$;
P_f is de berekende faalkans.

Cur frame Page 236 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Bijlage H: Materiaalgedrag

H1 MATERIAALGEDRAG

In deze bijlage wordt het materiaalgedrag van constructieve elementen in beschouwing genomen. Onder het materiaalgedrag wordt hier verstaan: de wijze waarop het materiaal bezwijkt. De twee uiterste materiaaleigenschappen met betrekking tot bezwijken zijn:

- brosse breuk;
- vloeien.

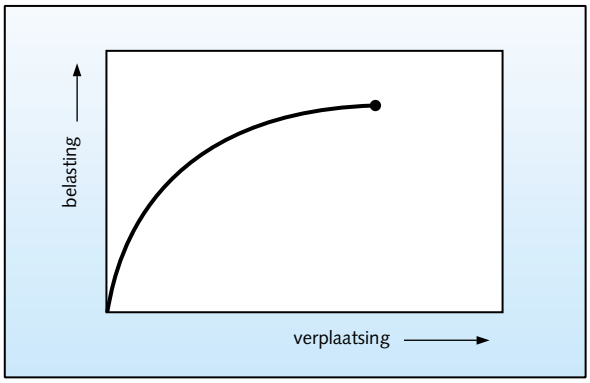
Bij brosse breuk zal na het overschrijden van een maximaal opneembare belasting plotseling bezwijken optreden en is er geen reststerkte meer aanwezig.
Als van vloeien sprake is, zal bij het overschrijden van een maximaal opneembare belasting de vervorming sterk toenemen bij gelijkblijvende belasting. Er is tijdens het vloeien een sterkte aanwezig die bekend staat als de vloeisterkte.
Als de vloeisterkte van het materiaal gelijk is aan de maximaal opneembare belasting is er sprake van een volledig ductiel (taai) materiaal.
Zuiver brosse of ductiele materialen laten zich schematiseren door respectievelijk een serie- of een parallelsysteem.
Hoewel zuiver bros of ductiel materiaalgedrag in werkelijkheid weinig voorkomt, zijn de ideale schematiseringen toch interessant. Het zijn de twee uitersten waartussen het werkelijke materiaalgedrag ligt.

H2 BROS MATERIAALGEDRAG

Bij zuiver bros materiaalgedrag treedt, nadat het materiaal heeft gefaald, een volledig functieverlies op. Een bekend voorbeeld van dit gedrag is de brosse breuk (zie fig. H1), die bijvoorbeeld bij steenachtige materialen optreedt.
Om de systeemtheorie te kunnen toepassen op het materiaalgedrag, wordt verondersteld dat het materiaal is opgebouwd uit een aantal elementaire cellen. Hierbij heeft elke cel een gelijke kansverdeling voor de sterkte. Omdat bros materiaalgedrag wordt geschematiseerd door een zuiver seriesysteem, zal falen van één elementaire cel direct leiden tot het falen van alle cellen.
Als de belasting in een vlakke doorsnede wordt beschouwd, is de elementaire cel een oppervlakte-element. Wordt de belasting op een driedimensionaal element beschouwd dan is de elementaire cel een volume-element.
De kans dat de elementaire cel i faalt, wordt gegeven door:

$$P_{f_i} = P(R_i < R) = F_{R_i}(R) \qquad \text{(H1)}$$

Cur frame Page 237 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM



Figuur H1. *Verloop van de breuksterkte als functie van de verplaatsing bij een ideaal bros materiaalgedrag.*

In de theorie van de brosse breuk [H1, H2 en H3] wordt aangenomen dat $F_{R_i}(R)$ voor kleine waarden wordt beschreven door:

$$F_{R_i}(R) = \left(\frac{R}{r_c}\right)^{\alpha} \qquad \text{voor } F_{R_i}(R) \ll 1 \text{ en } R > 0 \tag{H2}$$

waarin:

$F_{R_i}(R)$ is de kansverdeling van de sterkte van cel i;
R is de sterkte van de elementaire cel;
r_c is de verdelingsparameter;
α is de verdelingsparameter.

De kans dat het hele systeem van N elementaire cellen een sterkte R groter dan R heeft volgt, onder de aanname dat de cellen onderling onafhankelijk zijn, uit de extreme waarde theorie:

$$\begin{aligned} P(R > R) &= P(R_i > R)^N \\ &= \left(1 - F_{R_i}(R)\right)^N \\ &\approx \exp\left(-NF_{R_i}(R)\right) \end{aligned} \tag{H3}$$

De factor N is gelijk aan het quotiënt van de grootte van het beschouwde systeem V en de grootte van de elementaire cel V_0.
De verdelingsfunctie van de materiaalsterkte is dan:

$$F_R(R) = 1 - \exp\left(-\frac{V}{V_0}\left(\frac{R}{r_c}\right)^{\alpha}\right) \tag{H4}$$

Dit is een Weibull-verdeling (zie tabel B3).

Cur frame Page 238 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

Het gemiddelde en de standaardafwijking worden nu gegeven door:

$$\mu_R = r_c\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$$
$$\sigma_R = \mu_R\sqrt{\frac{\Gamma(1+2/\alpha)}{\Gamma^2(1+1/\alpha)}-1} \qquad \text{(H5)}$$

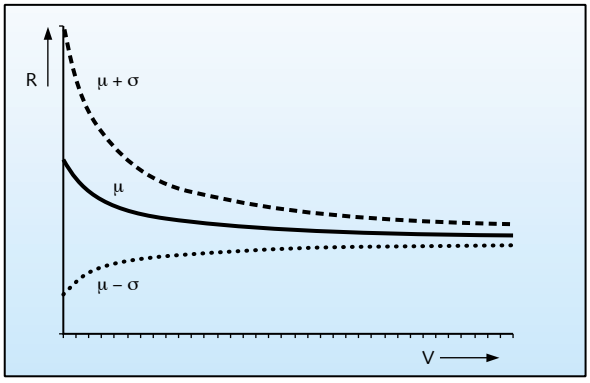
Als er vanuit wordt gegaan dat geen enkele elementaire cel bezwijkt beneden een grenswaarde r_0, kan de verdelingsfunctie voor de sterkte als volgt worden geschreven:

$$F_{Ri}(R) = \left(\frac{R-r_0}{r_c}\right)^{\alpha} \qquad \text{voor } R > r_0 \qquad \text{(H6)}$$

Er geldt dan:

$$F_R(R) = 1-\exp\left(-\left(\frac{V}{V_0}\right)\left(\frac{R-r_0}{r_c}\right)\right)$$
$$\mu_R = r_0 + r_c\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \qquad \text{(H7)}$$
$$\sigma_R = \mu_R\left(\frac{\mu_R-r_0}{\mu_R}\sqrt{\frac{\Gamma(1+2/\alpha)}{\Gamma^2(1+1/\alpha)}}-1\right)$$

Bij toenemende grootte van de beschouwde component treedt een vermindering van de gemiddelde sterkte op en een vermindering van de standaardafwijking. De karakteristieke waarde van een relatief klein monster leidt in dit geval tot een te optimistische schatting van de karakteristieke waarde van het systeem (zie fig. H2).

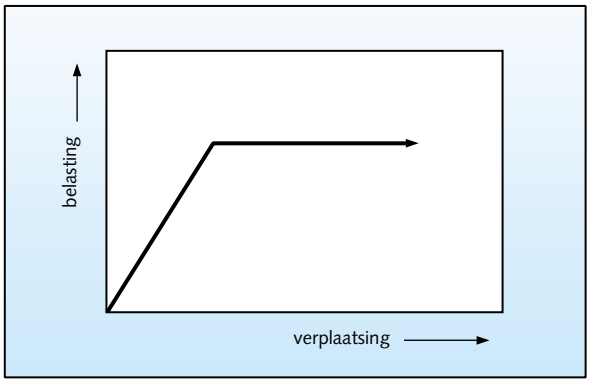


Figuur H2. *Verloop van de sterkte als functie van de grootte van het beschouwde systeem bij een ideaal bros materiaal.*

H3 DUCTIEL MATERIAALGEDRAG

Falen van een elementaire cel behoeft niet automatisch te leiden tot het falen van het hele systeem. Na het falen kan een herverdeling van de belasting over de overige cellen plaatshebben. Als er na het falen van een elementaire cel een restcapaciteit bestaat, wordt van ductiel materiaalgedrag gesproken (zie fig. H3).

Cur frame Page 239 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

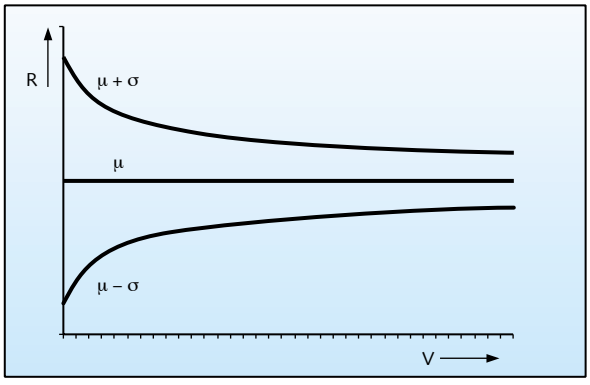


Figuur H3. *Verloop van de breuksterkte als functie van de verplaatsing bij een ideaal ductiel materiaalgedrag.*

Het falen van een ductiel materiaal kan daarom worden geschematiseerd door het parallelsysteem. Voor een materiaal opgebouwd uit $N = V/V_0$ elementaire cellen geldt dan voor het gemiddelde en de standaardafwijking:

$$\mu_R = \mu_{r_o}$$
$$\sigma_R = \mu_R \sqrt{\frac{V_0}{V}} \qquad \text{(H8)}$$

De sterkte is op grond van de centrale limietstelling normaal verdeeld, ongeacht de verdeling van de sterkte van de elementaire cellen.
Ductiel materiaalgedrag is in de praktijk redelijk goed met het parallelsysteem te beschrijven. Het volume-effect van de parameters klopt echter niet goed. Dit komt doordat parallelwerking in de praktijk slechts optreedt in twee van de drie dimensies, de derde dimensie is altijd een richting met seriewerking.
Bij toenemende grootte van de beschouwde component blijft de gemiddelde sterkte constant, maar neemt de standaardafwijking af. De karakteristieke waarde van een relatief klein monster leidt in dit geval tot een pessimistische schatting van de karakteristieke waarde van het systeem (zie fig. H4).



Figuur H4. *Verloop van de sterkte als functie van de grootte van het beschouwde systeem bij een ideaal ductiel materiaal.*

Cur frame Page 240 Thursday, August 10, 2000 9:10 AM

LITERATUUR

H1. WEIBULL, W., A statistical theory of the strength of materials. Proc. Roy. Swedish Inst. Eng. Res., nr. 159, 1939.

H2. FREUDENTHAL, A.M., Planning and interpretation of fatigue tests. ASTM symp. Statis. Aspects Fatigue Spec. Tech. Pub. nr. 121, 1951.

H3. FREUDENTHAL, A.M. en E.J. GUMBEL, Physical and statistical aspects of fatigue. Advan. Appl. Mech., Volume 4, 1956.